한국소음진동공학회 2011년 추계학술대회논문집, pp.572~577

마찰을 고려한 접시 스프링의 하중 변위 곡선 예측

Prediction of Load-Displacement of the Disc Spring with the Friction

신동호*·이정윤†·오재응**

Dong Ho Shin, Jae-Eung Oh and Jung Youn Lee

Key Words : Load-Displacement Curve(하중 변위 곡선), Disc Spring(접시 스프링), Friction(마찰), Energy Method(에너지법)

ABSTRACT

A disc spring consists of a conical disc. A load-displacement formula was newly developed in the form of energy method to consider both rigid and friction. The cross section of the disc spring has identical slope angles at the bottom of conical. To solve such a problem, an energy method calculation is proposed. To achieve the goal of this study, the proposed calculation is extended to a disc spring with friction. A firm basis background study based on Almen's work is presented in developing a new numerical approach to predict the available formulation for a disc spring with friction.

1. 서 론

1867년 'Belleville'가 프랑스에서 국제 특허를 받은 접시 스프링은 선형성을 가지는 일반 코일 스프링과는 달리 비선형성을 지니고 있다. 접시 스프링은 Fig. 1에서와 같이 중앙에 구멍이 있는 원판을 원추 형상으로 가공하고 상하방향에 하중이 작용하도록 하여 사용하는 스프링이다. 좁은 공간에서 비교적 큰 부하용량을 가지고 있어 자동차 클러치 부분에 많이 사용되며 원추 높이와 판자 두께의 비율에 따라서 특성이 다르기에 이 비율에 따라 활용도가 넓은 비선형 스프링 특성을 얻을 수 있다.

진동 해석에 있어 스프링의 강성은 매우 중요한 요인이며, 접시 스프링의 경우 하중-변위 곡선을 이용하여 강성을 계산할 수 있으므로 이를 예측하는 것이 중요하다. 기존의 연구는 Almen 과 Laszlo가 접시 스프링의 하중-변위 곡선을 계산하는 Almen-Laszlo 방정식[1]을 처음 제시 하였고, 이후 Curti 와 Olando는 Almen-Laszlo방정식을 토대로 하중-변위 곡선뿐만 아니라 radial 하중을 계산하는 방법[2]을 제시하였다. 그러나 기존의 연구는 접시 스프링이 처짐이 발생하여도 스프링의 내경과 외경의 변화는 없다는 가정 아래 방정식을 제시하였으며, 접지면 사이의 마찰은 고려하지 않았다.

본 연구에서는 Almen-Laszlo 방정식을 토대로 내경과 외경의 변화에 따라 하중-변위 곡선을 예측하였고, 에너지법을 이용하여 접시 스프링과 접지면 의 마찰을 고려한 접시 스프링의 하중-변위 곡선을 예측하였다. 이의 검증을 위하여 상용 모델[3]을 사용하여 기존의 방정식을 이용하여 예측한 하중-변위 곡선과 유한요소해석의 결과와 비교하였다.

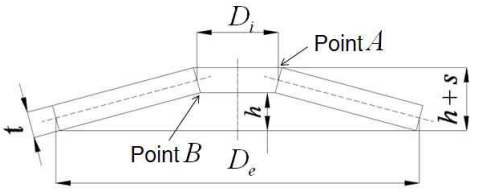


Fig. 1 Cross-sectional shape of the disc spring

† 교신저자; 경기대학교 기계시스템공학과
E-mail : jylee@kgu.ac.kr
Tel : 031-249-9811 , Fax :031-244-6300
* 경기대학교 대학원 기계공학과
** 한양대학교 기계공학부

2. 이론적 배경

2.1 Almen−Laszlo 방정식

Fig. 2(a)에서 접시 스프링의 휨 δ에 대하여 하중 P는 접시 스프링의 외주의 가장자리에서 균일하게 작용한다고 가정한다. 변형 전 접시 스프링 위에 미소부분 BC의 길이를 l, 변형 후의 길이를 l'이라 하면 l과 l'은 각각 다음과 같다.

$$l=(s-x\cos\beta)d\theta$$
$$l'=\{s-x\cos(\beta-\phi)\}d\theta \quad (1)$$

β와 ϕ가 미소하다고 가정하면 변형율 ε은 (2)식과 같이 구할 수 있다.

$$\varepsilon=\frac{l'-l}{l}=\frac{-x\phi\left(\beta-\frac{1}{2}\phi\right)}{s-x} \quad (2)$$

여기서, $\beta=\frac{t}{r_2}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$ $\phi=\frac{\delta}{r_2}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$ 이며 $\alpha=r_2/r_1$, t는 스프링의 두께이다.

접시 스프링의 반지름 방향 단면상에 있어서 접선방향에 작용하는 압축응력 σ_c는 다음과 같이 구해진다.

$$\sigma_c=\frac{\varepsilon E}{1-\nu^2}=\frac{-x s\left(\beta-\frac{\phi}{2}\right)E}{(1-\nu^2)(s-x)} \quad (3)$$

여기서, E는 탄성계수, ν는 포아송비이다.

Fig. 3에서 변형 전의 접시 스프링의 곡률을 ρ, 변형 후의 곡률을 ρ'이라하면 곡률의 변화량은 (4)식과 같다.

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}=\frac{\phi}{s-x} \quad (4)$$

Fig. 2의 BC부분에 작용하는 굽힘 모멘트 dM_t라 하면 dM_t는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$dM_t=\frac{\phi}{s-x}\cdot\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}dx \quad (5)$$

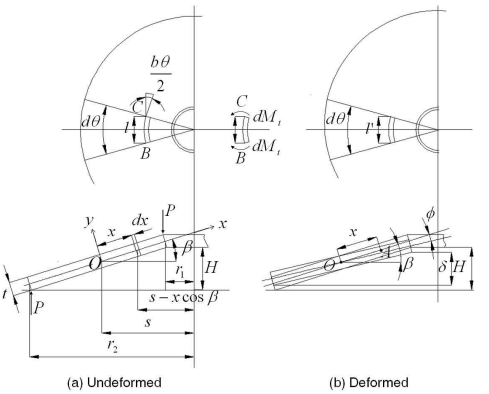


Fig. 2 Before and after deformation of the cross-sectional shape of the disc spring

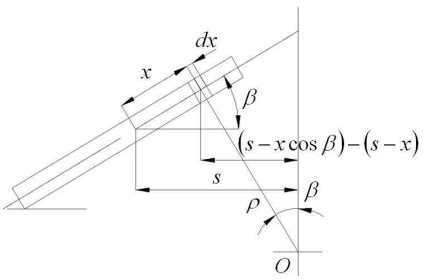


Fig. 3 Radius of tangential curvature of the disc spring

접시 스프링의 단면 중심축 x로부터 위쪽 y의 거리에 작용하는 접선방향의 굽힘 응력 σ_b는 다음과 같다.

$$\sigma_b=\pm\frac{E\phi y}{(1-\nu^2)(s-x)} \quad (6)$$

(3)식과 (6)식으로 합성응력 σ를 구하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma=-\frac{E\phi}{(1-\nu^2)(s-x)}\left\{x\left(\beta-\frac{\phi}{2}\right)\mp y\right\} \quad (7)$$

(7)식에 β와 ϕ를 대입하여 정리하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sigma=\frac{E\delta}{(1-\nu^2)(s-x)r_2}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)\times\left\{\frac{2H-\delta}{2r_2}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)x\mp y\right\} \quad (8)$$

접시스프링 중심축선에서 회전중심 O까지의 거리 s는 접선방향에 작용하는 힘이 0이 된다는 조건으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_{s-r_2}^{s-r_1}\sigma_c t dx = 0 \tag{9}$$

(9)식을 이용하여 s와 x를 (10)식과 같이 구할 수 있다.

$$s=\frac{r_2-r_1}{\ln\alpha} \qquad x=r_1\left(\frac{\alpha-1}{\ln\alpha}-1\right) \tag{10}$$

Fig. 2(a)에서 BC부분에 압축응력 σ_c에 의한 반지름 방향의 굽힘 모멘트를 dM_r'이라 하면 다음과 같다.

$$dM_r' = x(\beta-\phi)\sigma_t t dx d\theta \tag{11}$$

(11)식을 (9)식에 대입하여 정리하면 (12)식이 된다.

$$M_r' = \frac{E\phi\left(\beta-\frac{\phi}{2}\right)(\beta-\phi)t d\theta}{(1-\nu^2)} \times\left\{\frac{1}{2}\left(r_2^2-r_1^2\right)-2s(r_2-r_1)+s^2\ln\alpha\right\} \tag{12}$$

또한, BC부분에 굽힘 응력 σ_b에 의하여 반지름 방향에 굽힘 모멘트 dM_r''가 발생하므로 M_r'과 동일한 방법으로 구하면 다음과 같다.

$$M_r'' = \frac{Et^3\phi d\theta}{12(1-\nu^2)}\ln\alpha \tag{13}$$

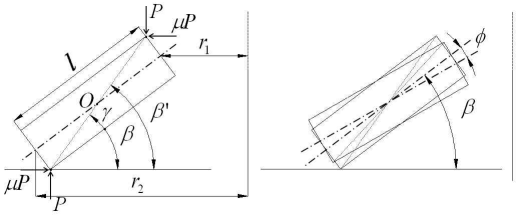


Fig. 4 Changed variables for proposal equation

접시스프링의 반지름 방향에 작용하는 전체 굽힘 모멘트 M_r은 (14)식과 같다.

$$M_r = \frac{E\delta d\theta}{r_2^2(1-\nu^2)}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \times\left\{(H-\delta)\left(H-\frac{\delta}{2}\right)t\cdot\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}-\frac{2}{\ln\alpha}\right)+\frac{t^3\ln\alpha}{6}\right\} \tag{14}$$

회전중심 O에서는 하중 P에 의한 굽힘 모멘트가 M_r과 같으므로 다음과 같은 식이 성립한다.

$$M_r = P\frac{d\theta}{2\pi}(r_2-r_1) \tag{15}$$

(15)식으로부터 하중 P는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P=\frac{C_4 E\delta t^4}{r_2^2(1-\nu^2)t}\left\{\left(\frac{H}{t}-\frac{\delta}{t}\right)\left(\frac{H}{t}-\frac{\delta}{2t}\right)+1\right\} \tag{16}$$

여기서,

$$C_4=\pi\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}-\frac{2}{\ln\alpha}\right)$$

이다.

2.2 수정된 Almen-Laszlo 방정식

(1) 내경, 외경 변화에 따른 방정식

기존의 Almen-Laszlo 방정식은 처짐이 일어나도 접시 스프링의 내경과 외경은 변하지 않는다는 가정 아래 방정식을 유도하였다. 그러나 처짐이 일어나면 스프링의 내경은 H가 0이 될 때까지 감소하다 H가 0보다 작아지면 다시 증가하며, 외경은 이와 반대의 형태를 보인다. 따라서 Fig. 4와 같이 변수를 수정하여 (15)식의 하중 P에 의한 회전 중심 O에서의 굽힘 모멘트를 수정하면 다음과 같다.

$$M_r = P\frac{d\theta}{2\pi}\frac{r_2-r_1}{\cos\beta'}\cos(\beta'-\phi) \tag{17}$$

여기서, $\beta' = \beta+\gamma, \phi = \beta-\sin^{-1}\left\{\frac{(H-\delta)}{l}\right\}$

이다.

(17)식을 P에 대하여 정리하면 (18)식과 같다.

$$P = \frac{C_4 E\delta t^4 \cos\beta'}{{r_2}^2(1-\nu^2)t\cos(\beta'-\phi)} \times\left\{\left(\frac{H}{t}-\frac{\delta}{t}\right)\left(\frac{H}{t}-\frac{\delta}{2t}\right)+1\right\} \quad (18)$$

(2) 기존의 마찰을 고려한 방정식(SCHNORR)[3]

기존의 마찰을 고려한 방정식은 (19)식과 같다.

$$P_f = P\frac{n}{1\pm\mu_m(n-1)\pm\mu_r} \quad (19)$$

여기서, P_f는 마찰을 고려한 하중, μ_m은 표면마찰계수, μ_r은 접선마찰계수, n은 접시스프링의 개수이다.

(3) 마찰을 고려한 제안한 방정식

Fig. 5에서 하중이 작용하는 부분에 접촉하는 구조물이 존재하고, 이로 인해 접시 스프링이 하중 P를 받으면 구조물과 접시 스프링 사이에서 마찰이 발생하게 된다. 따라서 회전중심 O에서는 하중 P와 마찰력 μP에 의한 굽힘 모멘트가 동시에 발생하게 되며 수정된 Almen-Laszlo 방정식을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_r = P\frac{d\theta}{2\pi}\frac{r_2-r_1}{\cos\beta'}\cos(\beta'-\phi) - \mu P\frac{r_2-r_1}{\cos\beta'}\sin(\beta'-\phi) \quad (20)$$

여기서, μ는 마찰계수이다.

(20)식을 P에 대하여 정리하면 마찰을 고려한 수정된 Almen-Laszlo 방정식을 (21)식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$P = \frac{C_4 E\delta t^4 \cos\beta'}{{r_2}^2(1-\nu^2)t\{\cos(\beta'-\phi)-\mu\sin(\beta'-\phi)\}} \times\left\{\left(\frac{H}{t}-\frac{\delta}{t}\right)\left(\frac{H}{t}-\frac{\delta}{2t}\right)+1\right\} \quad (21)$$

3. 컴퓨터 시뮬레이션

3.1 접시 스프링의 변위−하중 곡선

(1) 기존 방정식과 제안한 방정식

기존의 Almen-Laszlo 방정식과 본 논문에서 제안한 방정식을 이용하여 접시 스프링의 하중-변위 곡선을 예측하였다. Table 1에 제시한 내경에 대한 외경비 α가 서로 다른 두 가지 모델을 이용하여 α에 따른 하중-변위 곡선과 각각의 스프링의 두께를 변화시키면서 두께에 따른 하중-변위 곡선을 예측하였다. 제안한 방정식을 이용하여 예측한 하중-변위 곡선의 타당성을 검증하기 위하여 midas NFX를 이용한 유한요소해석의 결과와 비교하였다.

(2) 마찰을 고려하였을 경우 하중-변위 곡선

(19)식과 본 논문에서 제시한 방정식을 이용하여 마찰을 고려하였을 경우의 하중-변위 곡선을 예측하였다. 접시 스프링의 개수는 한 개 이므로 (19)식에서 표면마찰계수 μ_m은 고려하지 않았다.

Table 1에 제시한 모델을 이용하여 마찰계수를 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4의 다섯 가지 경우로 설정하여 예측하였다. 예측한 결과의 타당성을 검증하기 위하여 midas NFX를 이용하여 유한요소해석을 수행한 결과와 비교하였다.

4. 결과 및 고찰

(1) 내경, 외경의 변화를 고려한 하중-변위 곡선

Fig. 5(a)와 (b)는 각각의 접시 스프링의 두께에 따라 기존의 Almen-Laszlo 방정식과 제안한 방정식을 이용하여 두 가지 모델에 대하여 하중-변위 곡선을 예측하고 유한요소해석(midas NFX) 결과를 나타내었다. 예측한 결과 기존의 방정식과 잘 일치하였다.

기존의 방정식의 결과와 제안한 방정식의 결과를 유한요소해석의 결과와 비교하면 스프링의 변위 δ

Table 1 Parameters of disc spring for analysis

Case	r_1 (mm)	r_2 (mm)	α	H (mm)	t(mm)			E (MPa)	ν
					1	2	3		
1	6.1	12.5	2.05	0.9	0.5	0.7	0.9	206000	0.3
2	9.2	25.0	2.71	1.8	1.0	1.25	1.5		

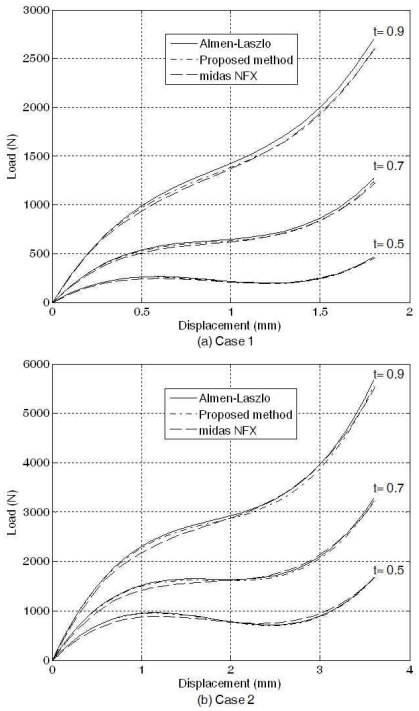


Fig. 5 Load-displacement curve for analysis method

가 H에 도달하기 전에는 오차가 생겼는데, 이는 유한요소해석의 수행에서 모델링에 의한 오차로 생각된다.

(2) 마찰계수에 따른 하중-변위 곡선

Fig. 6과 Fig. 7은 각각 마찰이 고려된 제안한 방정식과 유한요소해석의 결과를 나타낸 것으로 제안한 방법과 유한요소해석의 결과와 잘 일치하였지만 기존의 방정식[3]은 오차가 큰 것을 알 수 있었다.

마찰계수가 증가함에 따라 하중이 증가하는 것을 알 수 있었고, 최대 변위 지점에서는 마찰계수에 따른 하중의 차이가 크지 않았다.

제안한 방정식과 유한요소해석의 결과와 비교하면 스프링의 변위 δ가 H에 도달하기 전에는 오차가 생겼는데, 이는 유한요소해석의 수행에서 모델링에 의한 오차로 생각된다.

(3) 제안한 방정식의 타당성 검증

Fig. 8은 제안한 방정식과 유한요소해석의 결과

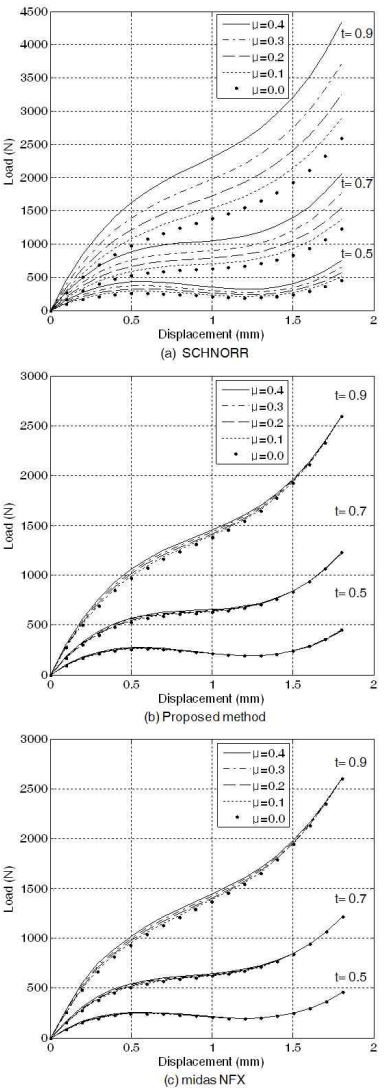
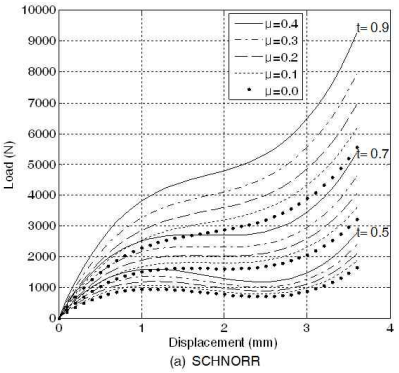


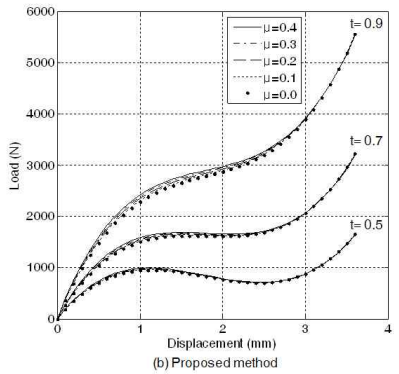
Fig. 6 Compare load-displacement curve acc. to friction(case1)

를 비교하여 그 타당성을 검증하기 위하여 하중을 변위에 대하여 Normalize하였다. 제안한 방정식의 결과와 유한요소해석의 결과가 비교적 잘 일치하였다.

5. 결 론

제안한 방정식을 이용하여 접시 스프링의 하중-변위 곡선을 예측한 결과 다음의 결론을 얻었다.





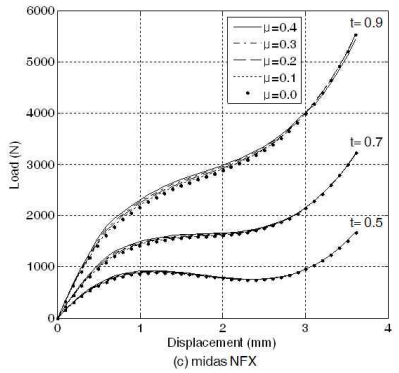
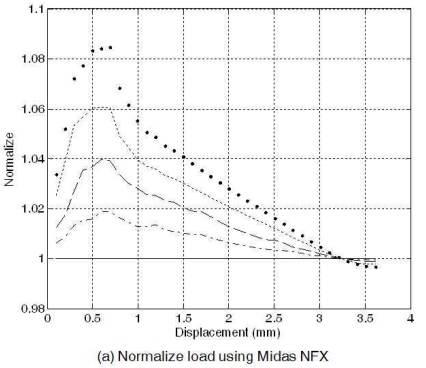


Fig. 7 Compare load-displacement curve acc. to friction(case2)

(1) 기존의 Almen-Laszlo 방정식을 수정하여 접시 스프링의 하중-변위 곡선을 예측하는 방정식을 개발하였다.

(2) 유한요소해석의 결과와 비교하였을 때 기존의 방정식의 결과의 오차를 제안한 방법으로 감소시켰으며 제안한 방법이 좀 더 유한요소해석의 결과와 잘 일치하였다.

(3) 마찰을 고려한 경우 제안한 방법과 유한요소해석의 결과를 비교한 결과 잘 일치하였다.



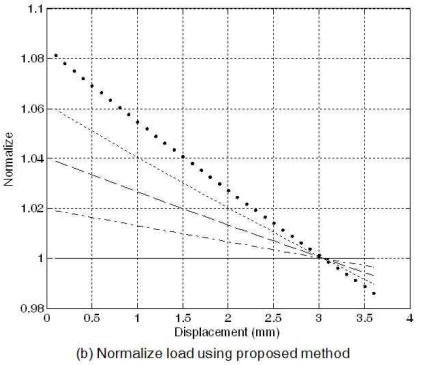


Fig. 8 Compare normalized load of case 1

(4) 마찰을 고려한 경우 제안한 방법과 유한요소해석을 수행하여 얻은 하중-변위 곡선을 Normalize 한 결과 비교적 잘 일치하여 제안한 방정식의 타당성을 검증하였다.

참 고 문 헌

(1)Almen, J. O., and Laszlo, A., 1936, The Uniform Section Disk Spring, Trans. ASME, 58(4), pp. 305-314.

(2)Curti, G. and Orlando, M., 1979, A new calculation of coned annular disk springs, Wire, 28(5), 199-204.

(3)SCHNORR, 2003, Handbook for disc springs, Schnorr Corporation.

(4)Society of Automotive Engineers, 1982, Design and Manufacture of Coned Disc Springs (Belleville Springs) and Spring Washer, SAE HS-1582.