

자기장 및 열하중을 받는 복합재료 판의 자유진동응답

Free Vibration Responses of Composite Plates Subjected to Transverse Magnetic and Thermal Fields

김성균* · 최중운** · 김영준*** · 박상윤*** · 송오섭†

Sung-Kyun Kim, Jongwoon Choi, Young-June Kim, Sang-Yun Park and Ohseop Song

Key Words : Composite Plate(복합재 평판), Free Vibrational Response(자유진동응답), Electromagnetic Field(전자기장), Thermal Load(열하중), Extended Galerkin Method(확장된 Galerkin 방법)

ABSTRACT

The equations of motion for composite plates incorporating magneto-thermo-elastic effects have been derived via Hamilton's principle. In order to get the insight into the implications of a number of geometrical and physical features of the system, the vibrational responses of finite composite rectangular plates immersed in a transversal magnetic field are investigated by applying the extended Galerkin method. The vibration response characteristics of a composite plate are exploited in connection with the magnetic field intensity, thermal load, and electric conductivity of fibrous composite materials. Some pertinent conclusions, which highlight the various effects induced by the magneto-thermo-elastic couplings, are outlined.

기 호 설 명

$\mathbf{B}, \mathbf{B}_0, \mathbf{b}$: 자속밀도벡터

$\mathbf{E}, \mathbf{E}_0, \mathbf{e}$: 전기벡터

$\mathbf{H}, \mathbf{H}_0, \mathbf{h}$: 자기벡터

$\mathbf{J}, \mathbf{J}_0, \mathbf{j}$: 전류밀도벡터

\mathbf{f} : 로렌츠 힘 벡터

V_i, v_i : 3D, 2D 변위 성분

β_1, β_2 : 횡전단 변위를

Θ : 온도 변화량

ℓ_1, ℓ_2 : 평판의 길이

N_L : 복합재료 적층판의 층 개수

$\rho_0^{(k)}$: k 번째 층의 밀도

$2h$: 평판 두께

θ : 섬유각

τ : 무차원 시간

z_k : 원점에서 k 번째 층의 바닥까지 거리

μ_0 : 진공 중에서의 투자율

φ, ψ : 미소변형 전기장의 e_1, e_2 항

χ : 미소변형 자기장의 h_3 항

$$\mathcal{M}_0[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} / N_L$$

$$\mathcal{M}_1[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} (z_{i+1} + z_i) / (2N_L)$$

$$\mathcal{M}_3[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} (z_{i+1}^2 + z_{i+1}z_i + z_i^2) / (3N_L)$$

$$\mathcal{M}_4[g_{\alpha\beta}] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} (z_{i+1}^4 + z_{i+1}^3 z_i + z_{i+1}^2 z_i^2 + z_{i+1} z_i^3 + z_i^4) / (5N_L)$$

† 교신저자; 충남대학교, 기계공학과

E-mail : songos@cnu.ac.kr

Tel : (042)821-5650, Fax (042)822-5642

* 한국원자력연구원

** 한화

*** 충남대학교, 대학원

1. 서 론

최근 미국의 NASA를 중심으로 세계 어디든지 2시간 내에 날아갈 수 있는 마하 5 이상의 극초음속 항공기(Hypersonic flight)의 개발이 활발히 진행되

고 있다. 이와 같은 극 초음속 항공기는 필수적으로 음속을 돌파 시 가해지는 충격파(shock wave)와 공기와의 마찰에 의해 가해지는 열하중(thermal load)를 동시에 받게 된다. 뿐만 아니라 항공기가 대기 중에서 극 초음속으로 비행할 때 항공기의 전면에 발생하는 충격파로 인해 공기가 압축, 가열되고 이로 인해 공기 분자가 분리되어 이온화 상태로 진행하게 된다. 이로 인해 항공기 주위에 플라즈마 층(자기장 층)이 형성되며 이러한 플라즈마 층의 밀도는 $10^{15} \sim 10^{19} \text{ m}^{-3}$ 으로 라디오 송수신을 단절시킬 수 있을 만큼의 고밀도 자기장 층을 형성한다(1). 따라서 극초음속 항공기와 같은 복합재료 구조물이 자기장과 열하중을 동시에 받을 때 구조물의 자유진동응답 특성을 이해하는 것은 매우 중요하다고 판단된다.

이와 관련된 연구동향으로 Anandkumar(2)는 자기-전기-탄성이 연성된 복합재료 보의 자유진동 해석을 수행하였으며, Ramirez와 Pan(3,4)은 자기-전기-탄성이 연성된 복합재료 평판의 자유진동 해석을 수행하였다. 또한 Bhangale와 Qin(5,6)은 자기-전기-탄성이 연성된 원통셀의 자유진동 해석을 수행하였다. Hasanyan과 Qin 등(7,8)은 판의 한 방향의 길이가 무한대인 경우에 대하여 탄성-열-전자기가 상호 연성된 판 구조물에 대한 비선형 자유진동응답에 관한 연구를 수행하였다. 또한 Kim과 Song(9)은 유한한 길이를 갖는 복합재료 평판에 자기장이 가해질 때의 자유진동 해석을 수행하였다.

본 논문은 선행연구 결과인 참고문헌(9)와 연계하여 가로 세로 방향으로 유한한 길이를 갖는 복합재료 평판에 열하중과 수직방향의 자기장이 작용할 때 열하중과 자기장의 세기가 자유진동 응답에 미치는 영향에 대하여 고찰하였다. 특히 이 연구를 통하여 자기장에 의해 발생하는 감소효과, 온도변화에 의한 강성변화, 복합재료의 전기전도도 변화에 따른 자유진동응답의 특성을 고찰하였다.

2. 운동방정식

2.1 기초 방정식

전자기장이 가해지는 평판의 운동방정식을 유도하기 위해서는 탄성, 열, 전자기장과 관련된 수식 정의가 선행되어야 한다. 따라서 본 연구에서는 변위장(열 포함)과 전자기장에 대한 기초방정식을 유도하고 이를 기반으로 운동방정식을 유도하였다.

(1) 변위장 (Displacement field)

복합재 평판의 운동방정식을 유도하기 위해 Fig. 1과 같이 평판 중심을 기준으로 (x_1, x_2, x_3) 로 하는 좌표계를 사용하고, 섬유각은 x_3 축을 기준으로 θ 만큼 회전한다고 설정하였다. 복합재 평판의 모델링을 위해 다음과 같은 운동학적 가정을 고려하였다.

- (a) 각 복합재료 층들은 서로 완전히 접촉되어 있으며 각 층의 두께는 모두 동일하다.
- (b) 횡 전단 변형을 고려한다.
- (c) 모든 변형은 선형으로 가정한다.

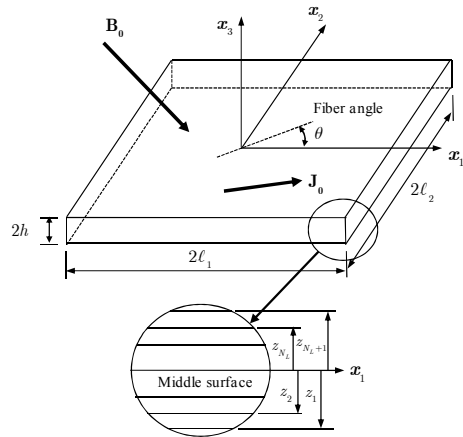


Fig. 1 Geometry of laminated composite plate

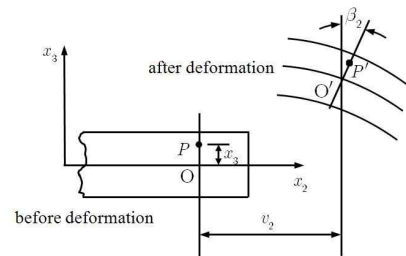


Fig. 2 Deformation variables for a rectangular plate

$$V_1(x_1, x_2, x_3, t) = v_1(x_1, x_2, t) + x_3 \beta_1(x_1, x_2, t) \quad (1a)$$

$$V_2(x_1, x_2, x_3, t) = v_2(x_1, x_2, t) + x_3 \beta_2(x_1, x_2, t) \quad (1b)$$

$$V_3(x_1, x_2, x_3, t) = v_3(x_1, x_2, t) \quad (1c)$$

여기서 v_1, v_2, v_3 는 x_1, x_2, x_3 방향의 중립면의 변위, β_1, β_2 는 x_2, x_1 축 방향의 회전각을 나타낸다.

식(1)로부터 변형률을 구하면 다음과 같다.

$$\epsilon_{11} = v_{1,1} + x_3 \beta_{1,1} \quad (2a)$$

$$\epsilon_{22} = v_{2,2} + x_3 \beta_{2,2} \quad (2b)$$

$$\gamma_{12} = v_{1,2} + v_{2,1} + x_3 (\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) \quad (2c)$$

$$\gamma_{13} = \beta_1 + v_{3,1} \quad (2d)$$

$$\gamma_{23} = \beta_2 + v_{3,2} \quad (2e)$$

여기서 $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot) / \partial x_i$.

(2)전자기장(Electromagnetic field)

전기장 및 자기장 방정식은 일반화된 맥스웰 방정식부터 유도된다. 미소 변형된 전자기장에서의 맥스웰 방정식은 다음과 같다. 식(3c)를 통해 전자기와 변위가 서로 연성되는 항이 생성되며 운동 방정식의 외력으로 작용하게 된다.

$$\text{페러데이 법칙} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (3a)$$

$$\text{앙페르 법칙} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3b)$$

$$\text{옴의 법칙} \quad \mathbf{J} = \mathbf{G}(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{V}} \times \mathbf{B}) \quad (3c)$$

$$\text{로렌츠 힘} \quad \mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (3d)$$

여기서 \mathbf{E}, \mathbf{H} 는 전기장 및 자기장 벡터를 나타내며, \mathbf{J}, \mathbf{B} 는 전류밀도 벡터와 자속밀도 벡터를 나타낸다. 또한 식(3d)에서 \mathbf{f} 는 단위 체적당 로렌츠 힘을 나타내며 μ_0 는 진공중에서 투자율을 나타낸다. 그리고 식(3c)에서 \mathbf{G} 는 전기전도행렬을 의미하며 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 $g_{11} = g_1 \cos^2 \theta + g_2 \sin^2 \theta$, $g_{33} = g_3$,

$g_{22} = g_2 \cos^2 \theta + g_1 \sin^2 \theta$, $g_{12} = (g_1 - g_2) \sin \theta \cos \theta$

$g_i (i = 1, 2, 3)$ 은 섬유의 주방향(principle directions) 전기전도율을 나타낸다.

평판이 미소 변형하고 전자기장이 선형으로 변화한다고 가정할 때 전계, 자계 및 자속밀도는 다음과 같이 1차 전자기장(primary electromagnetic quantities)과 미소변형된 전자기장(small disturbed

quantities)으로 구분하여 표현할 수 있다.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{e}, \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{b}$ 는 각각 미소변형에 따른 전계, 자계 및 자속밀도 벡터를 나타내며 식(3)의 맥스웰 방정식을 동일하게 적용할 수 있다. 한편 전계 벡터 $\mathbf{e}(x_1, x_2, x_3, t)$ 는 전계의 경계조건⁽²⁾을 대입하면 수평방향 전계 벡터 e_1, e_2 는 x_3 와 무관하게 된다. 또한 자계벡터 $\mathbf{h}(x_1, x_2, x_3, t)$ 에서 수직방향 자계벡터 h_3 는 자계의 경계조건⁽²⁾으로부터 x_3 와 무관한 함수로 정의할 수 있다. 따라서 e_1, e_2 와 h_3 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$e_1 \equiv e_1(x_1, x_2, t) \equiv \varphi(x_1, x_2, t) \quad (6a)$$

$$e_2 \equiv e_2(x_1, x_2, t) \equiv \psi(x_1, x_2, t) \quad (6b)$$

$$h_3 \equiv h_3(x_1, x_2, t) \equiv \chi(x_1, x_2, t) \quad (6c)$$

2.2 탄성-열-전기-자기 연성 운동 방정식

(1) 구성방정식 (Constitutive equations)

복합재료는 이방성재료로 주응력방향과 전체좌표계가 상이함으로 좌표계 변환행렬을 이용하여 다음과 같이 온도를 고려한 구성방정식을 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{11} \\ \bar{\alpha}_{22} \\ \bar{\alpha}_{12} \end{bmatrix} \Theta \quad (7a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{23} \\ S_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (7b)$$

여기서 $\bar{Q}_{ij} (i, j = 1, 2, 6)$ 를 환산 탄성계수, $\bar{\alpha}_{\alpha\beta}$ 를 환산 열팽창계수를 말한다.

(2) 운동방정식

식(1,2)와 식(7)을 아래의 헤밀턴 원리 식에 대입하여 운동방정식을 유도한다.

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_0}^{t_1} [T - U + W_{nc}] dt = 0 \quad (8)$$

@ $t = t_0, t = t_1$ 에서

$$\delta v_i = 0, \delta \beta_\alpha = 0 (i = 1, 2, 3 \quad \alpha = 1, 2)$$

여기서 T, U, W_{nc} 는 각각 운동에너지, 탄성에너지, 외력에 의한 가상일을 나타내며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta T = \int_\Omega \int_{-h}^h \rho \dot{V}_i \delta \dot{V}_i d\Omega dx_3 \quad (9a)$$

$$\delta U = \int_\Omega \int_{-h}^h [S_{ij} \delta \epsilon_{ij}] d\Omega dx_3 \quad (9b)$$

$$\delta W_e = \int_\tau \rho H_i \delta V_i d\tau + \int_\Omega \sigma_i \delta V_i d\Omega \quad (9c)$$

여기서 H_i 는 체력(body force), σ_i 는 표면력(surface traction force)를 나타낸다.

Hamilton principle을 이용한 운동방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\delta v_1 : N_{11,1} + N_{12,2} - m_1 \ddot{v}_1 + \sigma_{13} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h f_1 dx_3 = 0 \quad (10a)$$

$$\delta v_2 : N_{21,1} + N_{22,2} - m_1 \ddot{v}_2 + \sigma_{23} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h f_2 dx_3 = 0 \quad (10b)$$

$$\delta v_3 : N_{31,1} + N_{32,2} + \sigma_{33} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h f_3 dx_3 - m_1 \ddot{v}_3 = 0 \quad (10c)$$

$$\delta \beta_1 : M_{11,1} + M_{12,2} - N_{13} - m_3 \ddot{\beta}_1 + h \sigma_{13} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h x_3 f_{13} dx_3 = 0 \quad (10d)$$

$$\delta \beta_2 : M_{21,1} + M_{22,2} - N_{23} - m_3 \ddot{\beta}_2 + h \sigma_{23} \Big|_{-}^{+} + \int_{-h}^h x_3 f_{23} dx_3 = 0 \quad (10e)$$

경계조건

$$@ x_1 = \pm \ell_1$$

$$\delta v_1 : (-N_{11} + \underline{N}_{11}) \delta v_1 = 0, \delta v_2 : (-N_{12} + \underline{N}_{12}) \delta v_2 = 0,$$

$$\delta v_3 : (-N_{13} + \underline{N}_{13}) \delta v_3 = 0,$$

$$\delta \beta_1 : (-M_{11} + \underline{M}_{11}) \delta \beta_1 = 0, \delta \beta_2 : (-M_{12} + \underline{M}_{12}) \delta \beta_2 = 0$$

$$@ x_2 = \pm \ell_2$$

$$\delta v_1 : (-N_{12} + \underline{N}_{12}) \delta v_1 = 0, \delta v_2 : (-N_{22} + \underline{N}_{22}) \delta v_2 = 0,$$

$$\delta v_3 : (-N_{23} + \underline{N}_{23}) \delta v_3 = 0,$$

$$\delta \beta_1 : (-M_{12} + \underline{M}_{12}) \delta \beta_1 = 0, \delta \beta_2 : (-M_{22} + \underline{M}_{22}) \delta \beta_2 = 0$$

식(10)에서 합 응력과 합 모멘트는 다음과 같이 정의된다.

$$N_{\alpha\beta} \equiv \int_{-h}^h S_{\alpha\beta} dx_3, \quad N_{\alpha 3} \equiv \int_{-h}^h S_{\alpha 3} dx_3, \quad (11)$$

$$M_{\alpha\beta} \equiv \int_{-h}^h x_3 S_{\alpha\beta} dx_3 \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

식(10)에서 로렌츠 힘 $f_i (i = 1, 2, 3)$ 와 로렌츠 힘을 정의하는데 필요한 유도전류 $j_i (i = 1, 2, 3)$ 는 식(1)과 식(4~6)을 맥스웰 방정식 식(3)에 대입하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$f_1 = J_{02} B_{03} + J_{02} b_3 + (j_2 B_{03} - j_3 B_{02}) \quad (12a)$$

$$f_2 = -J_{01} B_{03} - J_{01} b_3 + (j_3 B_{01} - j_1 B_{03}) \quad (12b)$$

$$f_3 = (J_{01} B_{02} - J_{02} B_{01}) + (J_{01} b_2 - J_{02} b_1) + (j_1 B_{02} - j_2 B_{01}) \quad (12c)$$

$$j_1 = \left\{ g_{11}^{(i)} (\varphi + \dot{v}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^0) + g_{12}^{(i)} (\psi + \dot{v}_3 B_{01}^0 - \dot{v}_1 B_{03}^0) \right\} + x_3 \left\{ g_{11}^{(i)} (\dot{v}_2 B_{03}^1 + \dot{\beta}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^1) + g_{12}^{(i)} (\dot{v}_3 B_{01}^1 - \dot{v}_1 B_{03}^1 - \dot{\beta}_1 B_{03}^0) \right\} + x_3^2 \left\{ g_{11}^{(i)} \dot{\beta}_2 - g_{12}^{(i)} \dot{\beta}_1 \right\} B_{03}^1 \quad (13a)$$

$$j_2 = \left\{ g_{12}^{(i)} (\varphi + \dot{v}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^0) + g_{22}^{(i)} (\psi + \dot{v}_3 B_{01}^0 - \dot{v}_1 B_{03}^0) \right\} + x_3 \left\{ g_{12}^{(i)} (\dot{v}_2 B_{03}^1 + \dot{\beta}_2 B_{03}^0 - \dot{v}_3 B_{02}^1) + g_{22}^{(i)} (\dot{v}_3 B_{01}^1 - \dot{v}_1 B_{03}^1 - \dot{\beta}_1 B_{03}^0) \right\} + x_3^2 \left\{ g_{12}^{(i)} \dot{\beta}_2 - g_{22}^{(i)} \dot{\beta}_1 \right\} B_{03}^1 \quad (13b)$$

식(12)와 식(13)을 평판의 두께에 대해 적분하여 식(10)의 로렌츠 힘에 의해 합 응력과 합 모멘트 식을 유도하면 다음과 같다.

$$\int_{-h}^h f_1 dx_3 = 2h J_{02} B_{03}^0 + 2h J_{02} \mu_0 \chi + B_{03}^0 \int_{-h}^h j_2 dx_3 + B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3 j_2 dx_3 - B_{02}^0 \int_{-h}^h j_3 dx_3 - B_{02}^1 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3 \quad (14a)$$

$$\int_{-h}^h f_2 dx_3 = -2hJ_{01}B_{03}^0 - 2hJ_{01}\mu_0\chi$$

$$+ B_{01}^0 \int_{-h}^h j_3 dx_3 - B_{03}^0 \int_{-h}^h j_1 dx_3 + B_{01}^1 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3$$

$$- B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3 j_1 dx_3 \quad (14b)$$

$$\int_{-h}^h x_3 f_1 dx_3 = \frac{2h^3}{3} J_{03} B_{03}^1 + B_{03}^0 \int_{-h}^h x_3 j_2 dx_3$$

$$+ B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_2 dx_3 - B_{02}^0 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3$$

$$- B_{02}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_3 dx_3 \quad (14c)$$

$$\int_{-h}^h x_3 f_2 dx_3 = -\frac{2h^3}{3} J_{01} B_{03}^1 + B_{01}^0 \int_{-h}^h x_3 j_3 dx_3$$

$$+ B_{01}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_3 dx_3 - B_{03}^0 \int_{-h}^h x_3 j_1 dx_3$$

$$- B_{03}^1 \int_{-h}^h x_3^2 j_1 dx_3 \quad (14d)$$

2.3 자기장이 수직으로 작용할 때 운동 방정식

(1) 운동방정식

본 연구에서는 수치예제로 평판의 모든 끝단이 단 순지지 조건이고, 평판의 수직방향으로 자기장이 작용할 때 평판의 자유진동응답을 고찰하였으며, 해석에서 굽힘변위와 횡전단 변위의 연성만 고려하였다. 자기장이 수직으로 작용할 때의 운동방정식과 경계 조건을 변위의 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\delta v_3 : A_{45}(\beta_{2,1} + v_{3,12}) + A_{55}(\beta_{1,1} + v_{3,11})$$

$$+ A_{44}(\beta_{2,2} + v_{3,22}) + A_{45}(\beta_{1,2} + v_{3,12})$$

$$- A_{11}^\alpha \Theta v_{3,11} - 2A_{12}^\alpha \Theta v_{3,12} - A_{22}^\alpha \Theta v_{3,22} - I_0 \ddot{v}_3$$

$$= 0 \quad (15a)$$

$$\delta \beta_1 : D_{11}\beta_{1,11} + D_{12}\beta_{2,12} + D_{16}(\beta_{1,12} + \beta_{2,11})$$

$$+ D_{16}\beta_{1,12} + D_{26}\beta_{2,22} + D_{66}(\beta_{1,22} + \beta_{2,12})$$

$$- A_{45}(\beta_2 + v_{3,2}) - A_{55}(\beta_1 + v_{3,1}) - I_2 \ddot{\beta}_1$$

$$+ (B_{03}^0)^2 C_{12}^g \dot{\beta}_2 - (B_{03}^0)^2 C_{22}^g \dot{\beta}_1 = 0 \quad (15b)$$

$$\delta \beta_2 : D_{16}\beta_{1,11} + D_{26}\beta_{2,12} + D_{66}(\beta_{1,12} + \beta_{2,11})$$

$$+ D_{21}\beta_{1,12} + D_{22}\beta_{2,22} + D_{26}(\beta_{1,22} + \beta_{2,12})$$

$$- A_{44}(\beta_2 + v_{3,2}) - A_{45}(\beta_1 + v_{3,1}) - I_2 \ddot{\beta}_2$$

$$- (B_{03}^0)^2 C_{11}^g \dot{\beta}_2 + (B_{03}^0)^2 C_{12}^g \dot{\beta}_1 = 0 \quad (15c)$$

경계조건

$$@x_1 = \pm \ell_1,$$

$$\delta v_3 : v_3 = 0$$

$$\delta \beta_1 : D_{11}\beta_{1,1} + D_{12}\beta_{2,2} + D_{16}(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) = 0$$

$$\delta \beta_2 : \beta_2 = 0$$

$$@x_2 = \pm \ell_2$$

$$\delta v_3 : v_3 = 0$$

$$\delta \beta_1 : \beta_1 = 0$$

$$\delta \beta_2 : D_{16}\beta_{1,1} + D_{26}\beta_{2,2} + D_{66}(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) = 0$$

여기서 $C_{\alpha\beta}^g \equiv 2h\mathcal{M}_2[g_{\alpha\beta}]$, $\bar{g}_{\alpha\beta} \equiv \mathcal{M}_0[g_{\alpha\beta}]$, $(\alpha, \beta) = 1, 2$

(2) 무차원 운동방정식

앞 절에서 유도한 운동방정식을 무차원화하기 위해 아래와 같은 무차원변수를 사용하였다. 또한 식(17)은 경계조건을 만족하는 무차원 변위 근사함수를 나타내며, 확장된 Galerkin 방법을 사용하여 식(17)을 Hamilton식에 대입하여 식(18)과 같은 이산화된 운동방정식을 유도하였다.

$$\xi_1 \equiv x_1/\ell_1, \xi_2 \equiv x_2/\ell_2, \tau \equiv t\sqrt{\frac{D_{11}}{I_0\ell_1^4}},$$

$$\bar{v}_3 \equiv v_3/h, \bar{\Theta} = \frac{\Theta\alpha_0\ell_1^2}{h^2}, \bar{B}_{03}^0 = B_{03}^0\sqrt{\frac{g_0h}{\sqrt{\rho_0E_0}}}$$

$$\bar{v}_3 = \Psi_v^T(\xi_1, \xi_2)\mathbf{q}_v(\tau), \bar{\beta}_1 = \Psi_{\beta_1}^T(\xi_1, \xi_2)\mathbf{q}_{\beta_1}(\tau),$$

$$\bar{\beta}_2 = \Psi_{\beta_2}^T(\xi_1, \xi_2)\mathbf{q}_{\beta_2}(\tau) \quad (16)$$

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (17)$$

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (18)$$

여기서 $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{K}]$ 행렬은 각각 질량, 감쇠, 강성 행렬을 나타낸다.

식(18)의 해를 구하기 위해 상태공간식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f} \quad (19)$$

$$\text{여기서 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

식(19)의 해는 식 (20)과 같이 이산 시스템을 통해 근사적으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{x}^i = \phi \mathbf{x}^{i-1} + \psi \mathbf{q}^i \quad (20)$$

여기서 $\phi = e^{\mathbf{A}\Delta t}$, $\psi = [e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}]\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 이며, 천이행렬 $e^{\mathbf{A}\Delta t}$ 는 다음 식으로 근사적으로 구한다.

$$e^{\mathbf{A}\Delta t} = \sum_{k=0}^N \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^k}{k!} \quad (21)$$

3. 수치해석

수치해석에 사용된 물성치는 다음과 같다.

$$E_1 / E_0 = 10, E_2 / E_0 = 5, G_{12} / E_0 = 4,$$

$$G_{13} / E_0 = 2, \mu_{12} = \mu_{23} = \mu_{13} = 0.25, \alpha_1 / \alpha_0 = 0.1,$$

$$\alpha_2 / \alpha_0 = 2, \alpha_3 / \alpha_0 = 1, E_0 = 10^{10} N/m^2, \alpha_0 = 10^{-3},$$

$$g_0 = 10^8 S/m^3$$

초기조건은 $q_v(0) = 1, \dot{q}_v(0) = 0$ 을 사용하였다.

Fig. 3은 시간 $\tau = 0$ 에서 복합재료 평판의 중심에 무차원 수직변위 $q_v = 1$ 를 가한 후 놓았을 때, 자기장 변화에 따른 복합재료 평판의 자유진동 응답을 나타내고 있다. 그림에서 자기장의 세기가 커질수록 평판의 운동이 점차 감소하는 것을 알 수 있다. 이는 식(15)에서 자기장의 세기가 커질수록 운동방정식의 감쇠값이 증가하기 때문이다.

Fig. 4는 FSDT와 CPT 모델의 자유진동 응답을 비교한 그래프이다. 그림에서 자기장이 가해지지 않을 때의 자유진동 응답 결과는 FSDT와 CPT 결과가 매우 유사하게 나타났으나, 자기장의 세기가 커질수록 FSDT와 CPT 결과가 현저하게 차이가 나는 것을 알 수 있다. 이는 자기장의 세기가 FSDT모델이 굽힘 및 횡전단변형 감쇠행렬에 영향을 미치는 효과보다 CPT모델이 굽힘 감쇠행렬에 영향을 주는 효과가 더 크기 때문으로 동일한 자기장의 세기에서 CPT 모델보다 FSDT 모델의 진폭이 더 크게 나타나는 것으로 판단된다.

Fig. 5는 평판에 가해지는 온도변화에 따른 복합재료 평판의 자유진동 응답을 나타내고 있다. 그림에서 온도가 증가할수록 진폭의 주기가 짧아지는 것을 알 수 있다. 이는 식(15a)에서 온도의 증가에 따라 구조강성이 증가함에 따라 주기의 변화에 영향을 미치는 것으로 설명할 수 있다.

Fig. 6은 식(4)의 복합재료의 주방향 전기전도도의 변화에 따른 자유진동 응답 결과를 나타내고 있다. 그림에서 복합재료의 전기전도도가 클수록 진폭이 점차 커지는 것을 알 수 있다. 이는 식(15a)에서 전기전도도의 증가는 $C_{\alpha\beta}^q$ 를 증가시키므로 운동방정식의 감쇠행렬이 증가하게 된다. 이로 인해 전기전도도의 증가는 감쇠력을 증가시키고 이로 인해 진폭이 작아지게 된다.

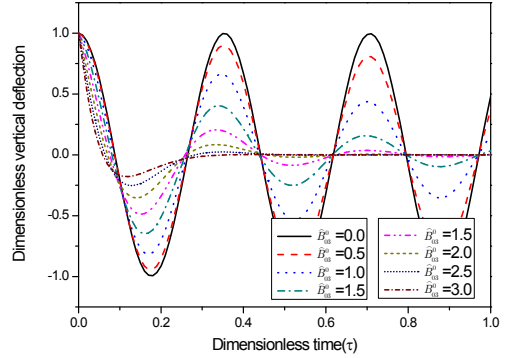


Fig. 3 Dimensionless vertical deflections as magnetic field intensity \tilde{B}_{03}^0 changes from 0 to 3.0 ($[0]_6, h/\ell_1 = 1/50, g_1/g_0 = 3.0, g_2/g_0 = 1.1, g_3/g_0 = 3.0$)

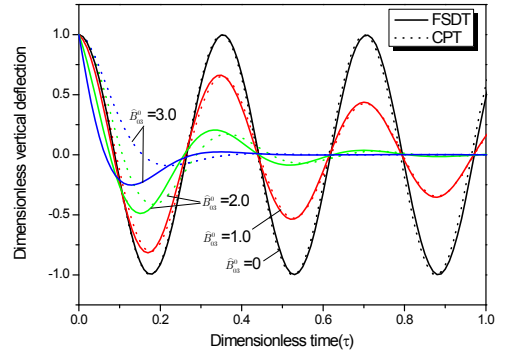


Fig. 4 Comparison of the dimensionless vertical deflection for the TS and NTS models ($[0]_6, h/\ell_1 = 1/50, g_1/g_0 = 3.0, g_2/g_0 = 1.1, g_3/g_0 = 3.0$)

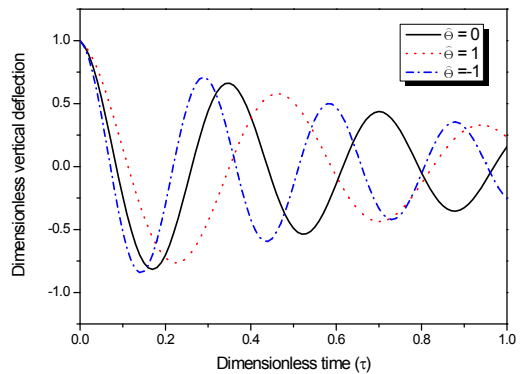


Fig. 5 Influence of the thermal load on the free vibrational responses ($[0]_6, h/\ell_1 = 1/50, g_1/g_0 = 3.0, g_2/g_0 = 1.1, g_3/g_0 = 3.0$)

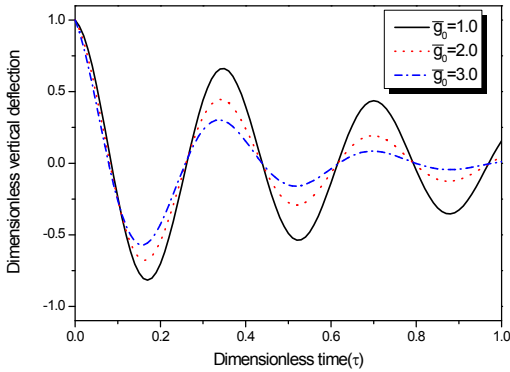


Fig. 6 Influence of the electric conductivity on the free vibrational responses ($[0]_6, h/\ell_1 = 1/50, g_1/g_0 = 3.0, g_2/g_0 = 1.1, g_3/g_0 = 3.0, \bar{g}_0 = g_0/10^8 [S/m^3]$)

3. 결론

본 연구에서는 탄성-열-자기-전기가 서로 연성된 복합재료 평판의 운동방정식과 경계조건을 유도하고 수직방향으로 자기장 및 열하중이 가해지는 평판에 대한 자유진동응답 해석을 수행하여 자기장, 온도, 전기전도도의 변화에 따른 응답특성을 고찰하였다. 해석결과, 자기장의 세기가 증가할수록 평판의 감쇠력이 증가되고 이로 인해 자유진동응답이 감소하는 것을 알 수 있었다. 또한 온도의 증감에 따라 자유진동응답이 크게 차이가 나는 것을 알 수 있는데 이는 온도가 평판의 구조강성을 변화시키기 때문이다. 그리고 복합재료의 전기전도도의 영향도 자기장과 마찬가지로 운동방정식의 감쇠행렬에 영향을 미침에 따라 전기전도도의 증가에 따라 자유진동응답이 감소함을 알 수 있었다. 마지막으로 자기-열-전기전도도 특성의 변화에 따른 자유진동응답 특성은 FSDT모델과 CPT모델이 큰 차이가 발생하는 것을 알 수 있었으며 이를 통해 구조-열-자기장이 연성된 구조물에서는 FSDT모델이 더욱 정확한 결과를 제시하는 것을 알 수 있었다.

참고문헌

(1) Keidar, M., Kim, M., and Boyd, I. D., 2008, Electromagnetic Reduction of Plasma Density during Atmospheric Reentry and Hypersonic Flights, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 45, No. 3, pp. 445~453.
 (2) Anandkumar, R., Annigeri, N., Ganesan, S., and Swarnamani, S., 2007, Free Vibration Behaviour of

Multiphase and Layered Magneto-electro-elastic Beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, No. 00, pp. 44~63.

(3) Ramirez, F., Heylinger, P. H. and Pan, E., 2007, Free Vibration Response of Two-dimensional Magneto-electro-elastic Laminated Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, No. 00, pp. 626~644.

(4) Pan, E. and Heylinger, P. H., 2002, Free Vibrations of Simply Supported and Multilayered Magneto-electro-elastic Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 252, No. 3, pp. 429~442.

(5) Bhangale, R. N. and Ganesan, N., 2005, Free Vibration Studies of Simply Supported Nonhomogeneous Functionally Graded Magneto-electroelastic Finite Cylindrical Shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 288, No. 00, pp. 412~422.

(6) Qin, Z., 2010, Magneto-thermo-elasticity of an Electroconductive Circular Cylindrical Shell Featuring Nonlinear Deformations, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 00, pp. 1797~1810.

(7) Hasanyan, D., Libresu, L., Qin, Z. and Ambur, D. R., 2005, Magneto-thermo-elastokinetics of Geometrically Nonlinear Laminated Composite Plates. Part 1: Foundation of the Theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 00, No. 00, pp. 153~175.

(8) Qin, Z., Hasanyan, D., Libresu, L. and Ambur, D. R., 2005, Magneto-thermo-elastokinetics of Geometrically Nonlinear Laminated Composite Plates, Part 2: Vibration and Wave Propagation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 00, No. 00, pp. 177~201.

(9) Kim, S. K., Lee, K. W., Moon, J. K., Choi, J. W., Kim, Y. J., Park, S. Y., and Song, O., 2011, Dynamic Characteristics of Composite Plates Subjected to Electromagnetic and Thermal Fields, *Journal of the KSNVE*, Vol. 21, No. 6, pp. 536~545.

(10) Kim, S. Y., 2001, *Engineering Electromagnetics*, Scitech, Seoul.

(11) Reddy, J. N., 2004, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*, 2nd Edition, CRC Press, New York.

후기

이 논문은 2010년도 교육과학기술부(한국연구재단)의 지원을 받아 수행된 일반연구자 지원사업(기본연구)임(과제번호 2010-0024485).