

랜덤하중이 가해진 복합재료 H-형 보의 동적 응답 해석

Dynamic Response Analysis of Composite H-Type Cross-Section Beams to Random Loads

김 성 균*·송 봉 건**·송 오 섭†

Sung-Kyun Kim, Pong-Gun Song and Ohseop Song

Key Words : Thin-Walled Composite(얇은 벽판 복합재), H-Type Cross-Section Beam(H형 단면 보), Primary Warping (1차 와핑), Secondary Warping (2차 와핑), Transverse Shear (횡 전단), Random Load(랜덤 하중), Normal Mode Method(정규 모드법)

ABSTRACT

A study of the bending-extension-transverse shear coupled random response of the composite beams with thin-walled open sections subjected to various types of concentrated and distributed random excitations is dealt with in this paper. First of all, equations of motion of thin-walled composite H-type cross-section beams incorporating a number of nonclassical effects of transverse shear and primary and secondary warping, and anisotropy of constituent materials are derived. On the basis of derived equations of motion, analytical expressions for the displacement response of the composite beams are derived by using normal mode method combined with frequency response function method.

1. 서 론

인공위성, 항공기, 우주선, 잠수함과 같은 구조물 들은 운행 기간 동안 열충격(thermal shock), 폭발, 충격과 등과 같은 다양한 동적하중(time dependent loads)을 받을 뿐만 아니라 바람이나 물 등의 유체 에 의한 랜덤 하중(random loads)도 받게 된다. 일반적으로 구조물의 설계는 외부 동적하중만을 고려 해서 설계가 이루어지는 것이 일반적이나 원자력 발전소 내의 핵연료 집합체와 같이 구조물의 두께가 얇고 주위에 유체가 흐를 때 유체에 의해 가해지는 랜덤 하중은 구조물 지지점에 피로 파괴를 유발할 수 있다. 따라서 외부에서 가해지는 동적하중 뿐만

아니라 랜덤하중에 의한 구조물의 동적 응답을 이해 하는 것은 매우 중요하다.

2. 운동방정식

2.1 H형 단면을 갖는 보의 운동방정식

H형 단면 보의 전체좌표계(global coordinate)로 보의 길이 방향 축을 z축으로 하는 (x,y,z) 좌표계를 설정하였으며, 보의 단면형상을 정의하기 위해 국소 좌표계(local coordinate)인 (n,s,z)를 설정하였다. 여기서 n과 s는 각각 윤곽선의 수직 및 접선 단위벡터를 나타낸다. Fig. 1은 H형 단면 보의 구조적 테일러일 기법에 따라 상판과 하판의 섬유각 방향이 비대칭이면 CAS(Circumferentially asymmetric stiffness)인 보의 형상을 나타내고 있다.

얇은 벽판 복합재료 보의 운동방정식을 유도하기 위해 다음과 같은 가정을 사용하였다.

† 송오섭; 정회원, 충남대학교 기계공학과
E-mail : songos@cnu.ac.kr
Tel : 042-821-5650

* 한국원자력연구원

** Virginia Polytechnic Institute and State University

- (a) 보의 단면에 대한 윤곽선 평면은 변형되지 않는다.
- (b) 1차, 2차 와핑 구속 효과를 고려한다.
- (c) 횡 전단 변형을 고려한다.
- (d) 원주방향 합응력 N_{ss} 는 다른 방향 합응력에 비해 무시할 정도로 작다.

위의 가정을 기본으로 하여 벽판 보의 3-D 탄성 문제를 1-D 문제로 변형할 수 있다. 따라서 3-D 변위 벡터항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u(x,y,z,t) = u_0(z,t) - y\phi(z,t) \quad (1a)$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(z,t) + x\phi(z,t) \quad (1b)$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(z,t) + \theta_x(z,t) \left[y(s) - n \frac{dx}{ds} \right] + \theta_y(z,t) \left[x(s) + n \frac{dy}{ds} \right] - \phi'(z,t) \left[F_w(s) - nr_t(s) \right] \quad (1c)$$

수식 (1a-1c)에서 $u_0(z,t), v_0(z,t), w_0(z,t)$ 는 x,y,z 축 방향 변위로 횡방향, 종방향, 인장 변위를 나타내며, $\theta_x(z,t), \theta_y(z,t), \phi(z,t)$ 는 x,y,z축에 대한 회전 변위로 횡전단, 종전단, 비틀림 변위를 나타낸다. 수식 (1c)에서 (')=d/dz이다.

또한 $F_w(s)$ 와 $nr_t(s)$ 는 각각 1차 및 2차 와핑을 나타내며 $F_w(s)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$F_w(s) = \int_0^s r_n(\bar{s}) d\bar{s} \quad (2)$$

여기서, 적분은 H형 보의 단면 형상을 따라 s의 함수인 r_n 을 선적분을 의미하며, \bar{s} 는 적분하기 위한 매개변수이다. r_n 과 r_t 는 다음과 같은 기하학적 관계를 갖는다.

$$r_n(s) = x(s) \frac{dy}{ds} - y(s) \frac{dx}{ds} \quad (3)$$

$$r_t(s) = -y(s) \frac{dy}{ds} - x(s) \frac{dx}{ds} \quad (4)$$

수식 (1a-1c)를 이용하여 변형율을 구하면 다음과 같다.

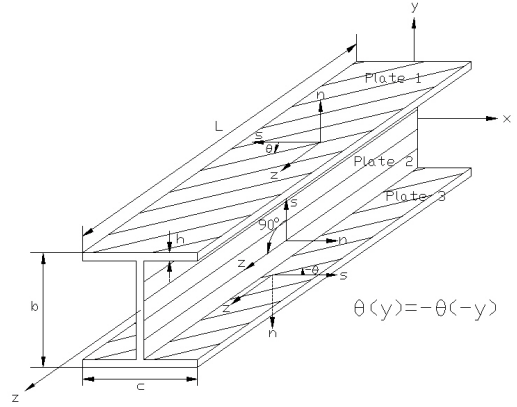


Fig.1 Geometry of the H-beam

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{zz}^{(0)} + n\epsilon_{zz}^{(1)} \quad (5a)$$

$$\gamma_{sz} = \gamma_{sz}^{(0)} + n\gamma_{sz}^{(1)} \quad (5b)$$

$$\gamma_{mz} = \gamma_{mz}^{(0)} \quad (5c)$$

여기서

$$\epsilon_{zz}^{(0)} = w_0' + x(s)\theta_y' + y(s)\theta_x' - \phi'' F_w(s) \quad (6a)$$

$$\epsilon_{zz}^{(1)} = \theta_y' \frac{dy}{ds} - \theta_x' \frac{dx}{ds} + \phi'' r_t(s) \quad (6b)$$

$$\gamma_{sz}^{(0)} = (u_0' + \theta_y) \frac{dx}{ds} + (v_0' + \theta_x) \frac{dy}{ds} \quad (6c)$$

$$\gamma_{sz}^{(1)} = 2\phi' \quad (6d)$$

$$\gamma_{mz}^{(0)} = (u_0' + \theta_y) \frac{dy}{ds} - (v_0' + \theta_x) \frac{dx}{ds} \quad (6e)$$

식(6)에서 (')=d/dz이다. 위 식을 헤밀턴 원리에 대입하면 CAS 구조물에 대한 횡방향 굽힘-축방향 인장-횡전단 연성 운동방정식 및 경계조건을 얻을 수 있다. 운동방정식에 사용한 강성계수 a_{ij} 와 질량계수 b_j 은 논문의 부록에 기술하였다.

$$\delta w_0 : a_{11}w_0'' + a_{14}(u_0'' + \theta_y') - b_1\ddot{w}_0 = 0 \quad (7)$$

$$\delta u_0 : a_{14}w_0'' + a_{44}(u_0'' + \theta_y') - b_1\ddot{u}_0 = f(z,t)$$

$$\delta \theta_y : a_{22}\theta_y'' - a_{14}w_0' - a_{44}(u_0' + \theta_y) - (b_5 + \delta_n b_{15})\ddot{\theta}_y = 0$$

$$\begin{aligned}
& @z=0; w_0 = u_0 = \theta_y = 0 \\
& @z=L; \delta w_0 : a_{11}w_0' + a_{14}(u_0' + \theta_y) = 0 \\
& \quad \delta u_0 : a_{14}w_0' + a_{44}(u_0' + \theta_y) = 0 \\
& \quad \delta \theta_y : a_{22}\theta_y' = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

여기서 $f(z,t)$ 는 복합재료 보에 x축 방향으로 가해지는 단위 길이 당 랜덤하중을 나타낸다.

2.2 H형 단면을 갖는 보의 진동방정식

위 식을 무차원화된 운동방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\overline{\delta w_0} : \overline{w_0}'' + f_1(\overline{u_0}'' + \theta_y') - g_1\omega^2\overline{w_0} &= 0 \\
\overline{\delta u_0} : \overline{u_0}'' + \theta_y' + f_2\overline{w_0}'' - g_2\omega^2\overline{u_0} &= f(\eta, t) \\
\overline{\delta \theta_y} : \theta_y'' - f_3\overline{w_0}' - f_4(\overline{u_0}' + \theta_y) - g_3\omega^2\theta_y &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
& @\eta=0; \overline{w_0} = \overline{u_0} = \theta_y = 0 \\
& @\eta=1; \overline{\delta w_0} : \overline{w_0}' + f_1(\overline{u_0}' + \theta_y) = 0 \\
& \quad \overline{\delta u_0} : \overline{u_0}' + \theta_y + f_2\overline{w_0}' = 0 \\
& \quad \overline{\delta \theta_y} : \theta_y' = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

여기서 $(\prime) = d/d\eta$ 를 의미하며, 운동방정식에 사용한 계수는 다음과 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned}
\overline{u_0} &= u_0/L, \quad \overline{w_0} = w_0/L, \\
f_1 &= \frac{a_{14}}{a_{11}}, \quad f_2 = \frac{a_{14}}{a_{44}}, \quad f_3 = \frac{a_{14}L^2}{a_{22}}, \quad f_4 = \frac{a_{44}L^2}{a_{22}}, \\
g_1 &= \frac{b_1L^2}{a_{11}}, \quad g_2 = \frac{b_1L^2}{a_{44}}, \quad g_3 = \frac{(b_5 + b_{15})L^2}{a_{22}}
\end{aligned} \tag{11}$$

식(9)의 직교성(orthogonality) 조건식을 유도하기 위해 자유진동에 대한 일반해를 구하기 위해 위의 해를 식(12)와 같이 가정한다.

$$\overline{u_0}(\eta, t) = \mathbf{U}(\eta)^T \mathbf{q}(t) \tag{12a}$$

$$\overline{w_0}(\eta, t) = \mathbf{W}(\eta)^T \mathbf{q}(t) \tag{12b}$$

$$\theta_y(\eta, t) = \mathbf{Y}(\eta)^T \mathbf{q}(t) \tag{12c}$$

여기서 $\mathbf{U}(\eta), \mathbf{W}(\eta), \mathbf{Y}(\eta)$ 는 경계조건을 만족하는 함수 벡터이며 $\mathbf{q}(t)$ 는 일반좌표 벡터를 나타낸다.

식 (12)를 운동방정식에 대입하고 임의의 r번째와 s번째의 모드형상 $U_s(\eta), W_s(\eta), Y_s(\eta)$ 와 $U_r(\eta), W_r(\eta), Y_r(\eta)$ 를 곱한 후 적분하면 다음과 같은 직교성 조건식을 구할 수 있다.

$$\int_0^1 [g_1 W_r W_s + g_2 U_r U_s + g_3 Y_r Y_s] d\eta = \overline{m_s} \delta_{rs} \tag{13}$$

여기서 $\overline{m_s}$ 는 s번째 모드에서의 일반화 질량을 의미하고, δ_{rs} 는 Kronecker delta 함수를 의미한다.

식 (12)를 운동방정식 식(9)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$g_1 \mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} + g_1 \omega^2 \mathbf{W} \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{14a}$$

$$g_2 \mathbf{U} \ddot{\mathbf{q}} + g_2 \omega^2 \mathbf{U} \mathbf{q} = \mathbf{f}(\eta, t) \tag{14b}$$

$$g_3 \mathbf{Y} \ddot{\mathbf{q}} + g_3 \omega^2 \mathbf{Y} \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{14c}$$

식(14)의 각 식에 $\mathbf{U}(\eta), \mathbf{W}(\eta), \mathbf{Y}(\eta)$ 를 각각 곱한 후 운동방정식을 모두 더하고 0에서 1까지 적분하면 직교성 조건식을 통해 다음과 같이 간단히 정리할 수 있다.

$$\ddot{\mathbf{q}} + \omega^2 \mathbf{q} = \frac{1}{m} \int_0^1 [f(\eta, t) \mathbf{U}] d\eta = \mathbf{F}_n(t) \tag{15}$$

식(15)에서 임의의 k번째 주파수 응답함수(frequency response function)는 다음과 같다.

$$H_k(\Omega) = \frac{1}{\omega_k^2 - \Omega} \tag{16}$$

일반좌표 함수 $q(t)$ 의 상호 스펙트럼 밀도함수 S_{q_n, q_k} 는 랜덤함수 $F_n(t)$ 의 상호 스펙트럼 밀도함수 S_{F_n, F_k} 와 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$S_{q_n, q_k}(\Omega) = H_n(\Omega) S_{F_n, F_k} H_k(\Omega) \tag{17}$$

여기서 상호 스펙트럼 밀도함수 S_{F_n, F_k} 는 다음과 같이 표현된다.

$$S_{F_n F_k}(\Omega) = \frac{1}{m_n m_k} \int_0^1 \int_0^1 U_n(\eta_1) U_k(\eta_2) S_f(\eta_1, \eta_2, \Omega) d\eta_1 d\eta_2 \quad (18)$$

여기서 S_f 는 랜덤하중 $f(\eta_1, t)$ 와 $f(\eta_2, t)$ 사이의 상호 스펙트럼 밀도함수를 나타내며 상관 밀도함수 (cross-correlation density function)를 푸리에 변환 (Fourier transform)하여 구할 수 있다.

$$S_f(\eta_1, \eta_2, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\eta_1, \eta_2, \tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau \quad (19)$$

$$R_f(\eta_1, \eta_2, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\eta_1, \eta_2, \tau) e^{i\Omega\tau} d\Omega \quad (20)$$

또한 식(12)를 통해 $\overline{u_0}(\eta, t)$, $\overline{w_0}(\eta, t)$, $\theta_y(\eta, t)$ 의 상호 스펙트럼 밀도함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S_u(\eta_1, \eta_2, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} U_n(\eta_1) U_k(\eta_2) S_{q_n q_k} \quad (21a)$$

$$S_w(\eta_1, \eta_2, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} W_n(\eta_1) W_k(\eta_2) S_{q_n q_k} \quad (21b)$$

$$S_{\theta_y}(\eta_1, \eta_2, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} Y_n(\eta_1) Y_k(\eta_2) S_{q_n q_k} \quad (21c)$$

여기서 식(17)을 식(21)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$S_u(\eta_1, \eta_2, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} U_n(\eta_1) U_k(\eta_2) H_n(\Omega) H_k(\Omega) S_{F_n F_k}$$

$$S_w(\eta_1, \eta_2, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} W_n(\eta_1) W_k(\eta_2) H_n(\Omega) H_k(\Omega) S_{F_n F_k}$$

$$S_{\theta_y}(\eta_1, \eta_2, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} Y_n(\eta_1) Y_k(\eta_2) H_n(\Omega) H_k(\Omega) S_{F_n F_k} \quad (22)$$

그리고 식 (18)을 식(22)에 대입하면 다음과 같다.

$$S_u(\eta_1, \eta_2, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_n(\Omega) h_k(\Omega) \Xi_{nk}(\Omega) U_n(\eta_1) U_k(\eta_2)$$

$$S_w(\eta_1, \eta_2, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_n(\Omega) h_k(\Omega) \Xi_{nk}(\Omega) W_n(\eta_1) W_k(\eta_2)$$

$$S_{\theta_y}(\eta_1, \eta_2, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_n(\Omega) h_k(\Omega) \Xi_{nk}(\Omega) Y_n(\eta_1) Y_k(\eta_2) \quad (23)$$

여기서

$$h_n = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \Omega^2)},$$

$$\Xi_{nk}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^1 U_n(\eta_1) U_k(\eta_2) S_f(\eta_1, \eta_2, \Omega) d\eta_1 d\eta_2$$

만약 $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ 이면 상호 스펙트럼 밀도함수 S_u, S_w, S_{θ_y} 는 다음과 같이 단순화된다.

$$S_u(\eta, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_n(\Omega) h_k(\Omega) \Xi_{nk}(\Omega) U_n(\eta) U_k(\eta)$$

$$S_w(\eta, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_n(\Omega) h_k(\Omega) \Xi_{nk}(\Omega) W_n(\eta) W_k(\eta)$$

$$S_{\theta_y}(\eta, \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_n(\Omega) h_k(\Omega) \Xi_{nk}(\Omega) Y_n(\eta) Y_k(\eta) \quad (24)$$

굽힘 변위, 축방향 인장 변위, 횡전단 변위에 대한 평균 제곱값(mean square value)은 각 변위의 스펙트럼 밀도함수를 전 주파수에 대해 적분하여 구할 수 있다.

$$\langle \overline{u^2}(\eta, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\eta, \Omega) d\Omega \quad (25a)$$

$$\langle \overline{w^2}(\eta, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_w(\eta, \Omega) d\Omega \quad (25b)$$

$$\langle \overline{\theta_y^2}(\eta, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta_y}(\eta, \Omega) d\Omega \quad (25c)$$

3. 결 론

본 연구에서는 복합재 H형 단면 보에 대해 1차, 2차 와핑효과, 전단변형 효과를 고려한 운동방정식과 경계조건을 유도하였다. 그리고 복합재 H형 단면 보에 외부 가진력으로 랜덤 하중이 가해질 때 굽힘 변위, 축방향 인장 변위, 횡전단 변위에 대한 스펙트럼 밀도함수 및 평균 제곱값 수식을 각각 유도하였다. 본 연구에서 유도한 수식은 랜덤하중이 구조물에 가해질 때 굽힘-인장-횡전단의 연성효과를 고려하고, 횡전단 효과, 와핑 효과에 의한 영향을 파악하는데 기초 자료로 활용할 수 있을 것으로 판단된다.

부 록

A.1 강성계수(Stiffness coefficients)

$$a_{11} = 2cK_{11}^{(1)} + bK_{11}^{(2)}$$

$$a_{14} = -2cK_{12}^{(1)}$$

$$a_{44} = 2cK_{22}^{(1)} + bA_{44}^{(2)}$$

여기서 b 와 c 는 보의 폭과 높이를 의미하며(Fig. 1 참조), (1)은 H형 보의 플랜지(flange)를 의미하며, (2) 보의 웹(web)을 의미한다. 여기서 K_{ij} 는 다음과 같다.

$$K_{11} = A_{22} - A_{12}^2 / A_{11}$$

$$K_{12} = A_{26} - A_{12}A_{16} / A_{11} = K_{21}$$

$$K_{43} = 2(D_{26} - B_{12}B_{16} / A_{11})$$

$$K_{44} = D_{22} - B_{12}^2 / A_{11}$$

$$K_{53} = 2(D_{66} - B_{16}^2 / A_{11})$$

위식에서 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는 다음식으로 구할 수 있다.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}^k} [n_k - n_{k-1}]$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}^k} [n_k^2 - n_{k-1}^2]$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}^k} [n_k^3 - n_{k-1}^3]$$

A.2 질량계수(Mass coefficients)

$$b_1 = \rho h(2c + b)$$

$$b_5 = \rho h \frac{c^3}{6}$$

$$b_{15} = \rho h^3 \frac{b}{12}$$

여기서 ρ 는 보의 밀도를 의미한다.

참 고 문 헌

- (1) Vlasov, V. Z., 1961, Thin-Walled Elastic Beams, 2nd Edition, Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation.(First Edition: Stroizdat, Moscow, 1940.)
- (2) Goodier, J. N., 1942, "Torsional and Flexural Buckling of Bars of Thin-Walled Open Section Under Compressive and Buckling Loads," Journal of Applied Mechanics, Vol. 64, pp. A-103-107.
- (3) Timoshenko, S. P., 1945, "Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thin-Walled Members of Open Cross-Section," Journal of the Franklin Institute, Vol. 239, No. 3, 4, 5, pp. 201-219.
- (4) Gere, J. M. and Lin, Y. K., 1958, "Coupled Vibration of Thin-Walled Beams of Open Cross Section," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 25, pp. 373-378.
- (5) Yu, Y. Y., 1972, "Variational Equation of Motion for Coupled Flexure and Torsion of Bars of Thin-Walled Open Section Including Thermal Effects," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 38, No. 2, pp. 502-506.
- (6) Beam, R. M. and Yagoda, H. P., 1973, "On the Torsional Static Stability and Response of Open Section Tubes Subjected to Thermal Radiation Loading," International Journal of Solids and Structures, Vol. 9, pp. 151-175.
- (7) Murozono, M., Hashimoto, Y. and Sumi, S., 1985, "Thermally-Induced Vibration and Stability of Booms with Open Cross Section Caused by Unidirectional Radiant Heating," Transactions of Journal of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Vol. 33, No. 383, pp. 719-727.
- (8) Librescu, L. and Song, O., 1992, "On the Static Aeroelastic Tailoring of Composite Aircraft Swept Wings Modelled as Thin-walled Beam Structures," Composite Engineering, Vol.2, No. 5-7, pp. 497-512.
- (9) Choi, J. and Song, O., 2008, "Effect of Boundary Conditions on the Stability Characteristics of Nanopipes," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 18, No. 10, pp. 1057-1064.

- (10) Song, O. and Librescu, L., 1993, "Free Vibration of Anisotropic Composite Thin-walled Beams of Closed Cross-section Contour," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 167, No. 1, pp. 129-147.
- (11) Song, O. and Librescu, L., 1995, "Dynamic Theory of Open Cross-Section Thin-Walled Beams Composed of Advanced Composite Material," *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, Vol. 8, No. 2, pp. 225-238.
- (12) Chandra, R. and Chopra, I., 1991, "Experimental and Theoretical Analysis of Composite I-Beams with Elastic Coupling," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 12, pp. 2197-2206.
- (13) Lee, S. H., Shin, S. H. and Yoo, H. H., 2003, "Flapwise Bending Vibration Analysis of Rotating Cross-Ply Composite Beams," *Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference*, pp. 994-999.
- (14) Savic, V., Tuttle, M. E. and Zabusky, Z. B., 2001, "Optimization of Composite I-Sections Using Fiber Angles as Design Variables," *Composite Structures*, Vol. 53, pp. 265-77.
- (15) Cardoso, J. B., Sousa, L. G., Castro, J. A. and Valido, A. J., 2002, "Optimal Design of Laminated Composite Beam Structures," *Structural Multidisciplinary Optimization*, Vol. 24, pp. 205-211.
- (16) Song, O., Ha, T. and Librescu, L., 2003, "Dynamics of Anisotropic Composite Cantilevers Weakened by Multiple Transverse Open Cracks," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 70, pp. 105-123.
- (17) Kim, S. K. and Yoo, H. H., 2001, "Vibration Analysis of Rotating Composite Cantilever Plates," *Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference*, pp. 407-413.