

임의 형상 음향 공동의 효율적인 고유치 해석 기법 개발

Development of an Effective Method for Extracting Eigenvalues of Arbitrarily Shaped Acoustic Cavities

강상욱[†]

S. W. Kang

Key Words: NDIF method(무차원 동영향 함수법), Eigenvalue(고유치), Arbitrarily shaped acoustic cavities(임의 형상 음향 공동)

ABSTRACT

An improved NDIF method is introduced to efficiently extract eigenvalues of two-dimensional, arbitrarily shaped acoustic cavities. The NDIF method, which was developed by the authors for the eigen-mode analysis of arbitrarily shaped acoustic cavities, membranes, and plates, has the feature that it yields highly accurate eigenvalues compared with other analytical methods or numerical methods (FEM and BEM). However, the NDIF method has the weak point that the system matrix of the NDIF method depends on the frequency parameter and, as a result, a final system equation doesn't take the form of an algebra eigenvalue problem. The system matrix of the improved NDIF method developed in the paper is independent of the frequency parameter and eigenvalues can be efficiently obtained by solving a typical algebraic eigenvalue problem. Finally, the validity and accuracy of the proposed method is verified in two case studies, which indicate that eigenvalues and mode shapes obtained by the proposed method are very accurate compared to the exact method, the NDIF method or FEM(ANSYS).

1. 서론

본 논문의 저자는 임의 형상 음향 공동, 멤브레인, 평판의 고유치와 고유모드를 정확히 구하기 위한 방법으로 NDIF 법(Non-dimensional Dynamic Influence Function Method)을 1999 년 처음으로 개발 하였다⁽¹⁾. NDIF 법은 유한요소법⁽²⁾과 경계요소법⁽³⁾에 비해 해의 정밀도 면에서 탁월한 우수성을 가지고 있음이 저자의 다양한 발표 논문들⁽⁴⁻¹⁶⁾을 통해 증명되었다.

그러나, NDIF 법은 유한요소법이나 경계요소법과는 달리 최종 시스템 행렬이 주파수 파라미터에 종속되는 단점을 가진다. 결과적으로 최종 시스템행렬식은 대수 고유치 문제(algebra eigenvalue problem)의 형태를 가지지 못하게 되어서, 시스템 행렬로부터 고유치와 고유모드를 추출하는 과정이 매우 번거롭게 된다⁽¹⁷⁾.

저자는 이러한 문제점을 해결하기 위해, 최근에 기존 NDIF 법 이론을 개선하여 단순하지 경계조건을 가진 임의 형상 평판의 고유치와 고유모드를 수월하게 추출할 수 있는 새로운 NDIF 법을 개발하였다⁽¹⁷⁾. 본 논문에서는 이전 연구 결과⁽¹⁷⁾를 응용/확장하여 임의 형상 2 차원 음향 공동의 고정밀도 고유치와 고유모드를 효율적으로 구할 수 있는 개선된 NDIF 법을 제안하고자 한다.

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계조건

Fig. 1 에서 실선은 강체벽(rigid wall) 경계조건을 가진 2 차원 음향 공동의 경계(Γ)를 보여준다. 음향 공동의 지배방정식은 식(1)과 같은 헬름홀츠 방정식(Helmholtz equation)으로 나타내어진다⁽⁵⁾.

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

여기서 \mathbf{r} 은 음향 공동 내부의 한 점 P 에 대한 위치벡터를 의미하고(Fig. 1 참조), $p(\mathbf{r})$ 은 음향 공동 내부의 한 점 P 에서의 음압(sound pressure)을 나타내며, k 는 주파수 파라미터이다. 그리고 강체벽 음향 공동의 경계 Γ

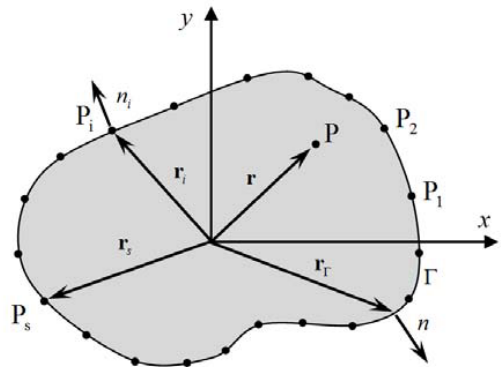


Fig. 1 Arbitrarily shaped, 2-D acoustic cavity discretized with boundary nodes P_1, P_2, \dots, P_N .

[†] 교신저자; 정희원, 한성대학교 기계시스템공학과

E-mail : swkang@hansung.ac.kr

Tel : (02) 760-4228, Fax : (02) 760-4329

에서의 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_\Gamma)}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

여기서 \mathbf{r}_Γ 는 음향 공동의 경계 상의 한 점에 대한 위치벡터이며, n 은 경계에서의 법선 방향을 의미한다(Fig. 1 참조).

2.2 기존 NDIF 법⁽⁵⁾ 설명

NDIF 법에서는 Fig. 1에서와 같이 해석 대상 음향 공동의 경계 Γ 는 N 개의 노드들로 이산화된다. 그리고 위치벡터 \mathbf{r} 로 표시된 음향 공동 내부의 한 점 \mathbf{P} 에서의 음압 $p(\mathbf{r})$ 은 다음과 같이 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 가정된다⁽⁵⁾.

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^N A_s J_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|) \quad (3)$$

여기서 J_0 는 제 1종 0차 베셀 함수(Bessel function)를 나타내며, A_s 는 미지 상수이다. 그리고 \mathbf{r}_s 는 음향 공동 경계에 위치한 노드 \mathbf{P}_s 에 대한 위치 벡터를 뜻한다. 참고로 식(3)은 지배방정식 식(1)을 정확히 만족한다.

가정된 음압 식(3)이 음향 공동의 경계에 위치한 노드들 위에서 강체벽 경계 조건을 만족하도록 하기 위해, 경계 조건 식(2)를 다음과 같이 이산화된 경계 조건으로 재정의한다.

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_i)}{\partial n_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

여기서 \mathbf{r}_i 는 경계 노드 \mathbf{P}_i 에 대한 위치벡터를 뜻하며, n_i 는 노드 \mathbf{P}_i 에서의 법선 방향을 의미한다(Fig. 1 참조).

다음으로 이산 경계조건 식(4)를 가정된 음압 식(3)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있으며,

$$\sum_{s=1}^N A_s \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|) = 0, \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

식(5)에서 미분을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\sum_{s=1}^N A_s k J_1(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|) \frac{\partial}{\partial n_i} (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|) = 0, \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

마지막으로 식(6)을 정리하면 다음과 같은 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}(k) \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

여기서 시스템 행렬 $\mathbf{SM}(k)$ 의 i 번째 행과 s 번째 열 위치에 있는 성분은 다음의 식에 의해 주어진다.

$$SM_{is} = k J_1(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|) \frac{\partial}{\partial n_i} (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|). \quad (8)$$

최종적으로 음향 공동의 고유치는 식(7)에서 주어진 시스

템 행렬 $\mathbf{SM}(k)$ 의 관별식의 근(root), 즉 식(9)의 근으로부터 구해질 수 있다.

$$\det[\mathbf{SM}(k)] = 0. \quad (9)$$

앞의 서론에서 언급한 바와 같이, 식(9)에 있는 NDIF 법의 최종 시스템 행렬 $\mathbf{SM}(k)$ 는 주파수 파라미터 k 의 함수로 나타나게 되어서, 일반적인 대수 고유치 문제를 푸는 방식으로 고유치와 고유모드를 구할 수가 없게 된다. 결과적으로, 식(9)의 해를 찾기 위해서는, 관심 주파수 파라미터 범위에서 주파수 파라미터를 증가시키면서 $\det[\mathbf{SM}(k)]$ 의 함수 값을 그래프로 그린 후, 그래프에서 극소가 되는 점을 일일이 찾아야 하는 비효율성이 NDIF 법에서는 존재한다.

2.3 개선된 NDIF 법

위에서 언급한 NDIF 법의 비효율성(단점)을 극복하기 위해, 식(6)에 포함되어 있는 베셀 함수 $J_1(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|)$ 는 다음과 같이 테일러 시리즈 전개(Taylor series expansion)에 의해 근사화 된다⁽¹⁸⁾.

$$J_1(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|) \approx \sum_{j=0}^M \frac{(-1)^j (\Lambda R_{is} / 2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}$$

$$= \sum_{j=0}^M k^{1+2j} \phi_j(R_{is}), \quad (10)$$

여기서 R_{is} 와 $\phi_j(R_{is})$ 는 다음과 같다.

$$R_{is} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|, \quad (11)$$

$$\phi_j(R_{is}) = \frac{(-1)^j (R_{is} / 2)^{1+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}. \quad (12)$$

식(10)을 진동해 식(6)에 대입한 후 정리하면 다음을 얻을 수 있으며,

$$\sum_{s=1}^N A_s k \left(\sum_{j=0}^M k^{1+2j} \phi_j(R_{is}) \right) \frac{\partial R_{is}}{\partial n_i} = 0, \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

식(13)을 변형하면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{j=0}^M k^{2(j+1)} \sum_{s=1}^N A_s \phi_j(R_{is}) \frac{\partial R_{is}}{\partial n_i} = 0, \quad (14)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

식(14)를 보다 간결히 표현하기 위해 다음과 같이 나타낸다.

$$\sum_{j=0}^M \lambda^{(j+1)} \sum_{s=1}^N A_s \psi_j(R_{is}) = 0, \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

여기서

$$\lambda = k^2, \quad \psi_j(R_{is}) = \phi_j(R_{is}) \frac{\partial R_{is}}{\partial n_i}. \quad (16, 17)$$

이제, 식(15)를 λ 에 대한 다항식(polynomial equation)의 형태로 다음과 같이 재 작성한다.

$$\lambda \sum_{s=1}^N A_s \psi_0(R_{is}) + \lambda^2 \sum_{s=1}^N A_s \psi_1(R_{is}) + \dots + \lambda^{M+1} \sum_{s=1}^N A_s \psi_M(R_{is}) = 0. \quad (18)$$

그리고, 식(18)의 좌변을 공통 인수 λ 로 뽑아 내면 다음과 같이 되며,

$$\lambda \left[\sum_{s=1}^N A_s \psi_0(R_{is}) + \lambda \sum_{s=1}^N A_s \psi_1(R_{is}) + \dots + \lambda^M \sum_{s=1}^N A_s \psi_M(R_{is}) \right] = 0, \quad (19)$$

식(19)는 다음과 같이 두 개의 식으로 분리될 수 있다.

$$\lambda = 0, \quad (20)$$

$$\sum_{s=1}^N A_s \psi_0(R_{is}) + \lambda \sum_{s=1}^N A_s \psi_1(R_{is}) + \dots + \lambda^M \sum_{s=1}^N A_s \psi_M(R_{is}) = 0. \quad (21)$$

식(20)은 강제벽 경계조건을 가진 음향 공동의 첫 번째 고유치가 0(zero)임을 뜻하며, 상위 고차 고유치들은 식(21)의 해로부터 구해질 수 있다.

다음으로 식(21)을 행렬식의 형태로 다시 적으면 식(22)와 같이 고차 다항 고유치 문제(higher order polynomial eigenvalue problem)⁽¹⁹⁾의 형태로 표현될 수 있다.

$$\Psi_0 \mathbf{A} + \lambda \Psi_1 \mathbf{A} + \dots + \lambda^M \Psi_M \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (22)$$

여기서 행렬 Ψ_j 의 i 번째 행과 s 번째 열에 위치한 성분은 다음 식에 의해 주어진다.

$$\Psi_j(i, s) = \psi_j(R_{is}). \quad (23)$$

이제, 식(22)를 다음과 같이 재작성하는 방법에 의해 선형화시킨다⁽¹⁹⁾.

$$\mathbf{SM}_L \mathbf{B} = \lambda \mathbf{SM}_R \mathbf{B}, \quad (24)$$

여기서 시스템 행렬 \mathbf{SM}_L 과 \mathbf{SM}_R 그리고 미지 벡터 \mathbf{B} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{SM}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I} \\ -\Psi_0 & -\Psi_1 & -\Psi_2 & \dots & -\Psi_{M-1} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{SM}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \Psi_M \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\mathbf{B} = \{ \mathbf{A}^T \quad \lambda \mathbf{A}^T \quad \lambda^2 \mathbf{A}^T \quad \dots \quad \lambda^{M-1} \mathbf{A}^T \}. \quad (27)$$

마지막으로 식(24)는 양변에 역행렬 \mathbf{SM}_R^{-1} 을 곱하는 방법에 의해 다음과 같이 변경된다.

$$\mathbf{SM}_R^{-1} \mathbf{SM}_L \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}. \quad (28)$$

식(28)을 다시 작성하면, 최종 시스템 행렬식은 다음과 같이 대수 고유치 문제로 정식화된다.

$$\mathbf{SM} \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}, \quad (29)$$

여기서

$$\mathbf{SM} = \mathbf{SM}_R^{-1} \mathbf{SM}_L. \quad (30)$$

최종 시스템 행렬식 식(29)에 포함된 시스템 행렬 \mathbf{SM} 은 식(7)에 포함되어 있는 시스템 행렬과는 다르게, 주파수 파라미터의 함수가 아님을 확인할 수 있다. 결과적으로 음향 공동의 고유치와 고유모드는 일반적인 대수 고유치 문제를 푸는 방법에 의해 효율적으로 구해질 수 있다.

3. 검증 예제

3.1 직사각형 음향 공동

본 예제에서는 Fig. 2와 같이 가로 길이가 1.2m, 세로 길이가 0.9m 인 직사각형 2 차원 음향 공동을 16 개의 노드로 이산화한 후, 본 논문에서 제안된 방법과 NDIF 법을 적용하였다. Fig 2 에서 직사각형 공동의 코너(corner)에 위치한 노드 P_3 에서의 법선 방향 n_3 은 양쪽 두 변의 법선 방향을 평균하는 방법에 의해 결정되었다. 나머지 세 개 코너에서의 법선 방향도 마찬가지로 방법에 의해 결정되었다.

직사각형 음향 공동의 경우 엄밀해가 존재하기 때문에 엄밀해 방법⁽²⁰⁾을 이용하여 음향 공동의 고유치도 구하였다. 그 결과는 Table 1 에 요약되었다. Table 1 에서 고유치 바로 옆에 제시된 괄호 안의 값은 엄밀해 방법(Exact

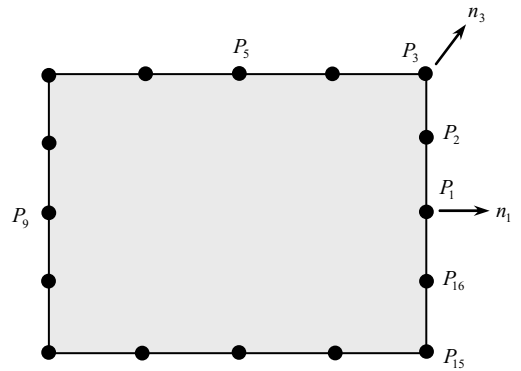


Fig. 2 Rectangular, 2-D acoustic cavity discretized with 16 nodes.

Table 1 Eigenvalues of the rectangular acoustic cavity (parenthesized values denote errors (%) with respect to the values by the exact method)

λ_i	Proposed method ($M = 20$)	NDIF method	Exact method ⁽²⁰⁾
	16 nodes		
1	2.618 (0.00)	2.618 (0.00)	2.618
2	3.491 (0.00)	3.491 (0.00)	3.491
3	4.362 (0.02)	4.363 (0.00)	4.363
4	5.236 (0.00)	5.236 (0.00)	5.236
5	6.293 (0.00)	6.293 (0.00)	6.293
6	6.983 (0.03)	6.982 (0.01)	6.981

method)에 대한 오차(%)를 의미한다. 본 논문에서 제안된 방법(Proposed method)에 의해 구해진 고유치들을 엄밀해 방법에 의해 구해진 고유치들과 비교해볼 때, 오차가 0.03% 이내에 있을 정도로 본 논문에서 제안된 방법이 아주 정확함을 확인할 수 있다.

그리고 NDIF 법이 본 논문에서 제안된 방법에 비해 조금 더 정확한 것으로 확인되는데, 이는 본 논문에서 제안된 방법은 식(10)에서 베셀 함수를 시리즈 함수로 근사화하는 과정을 이용했기 때문이다.

본 논문에서 제안된 방법을 이용하여 직사각형 음향 공동의 고유모드도 성공적으로 구해졌으며, 그 결과는 Fig. 3에 제시되었다. 참고로 지면 관계 상 다섯 번째 고유 모드 형상만 본 논문에서 제시되었다. 고유 모드 형상에서 골(valley) 부분은 음압이 최소인 노달 라인(nodal line)을

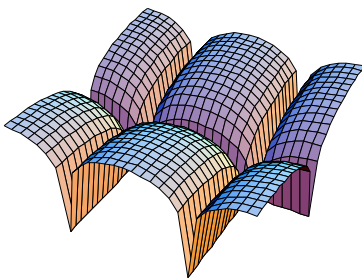


Fig. 3 5th mode shape of the rectangular cavity when 16 nodes are used.

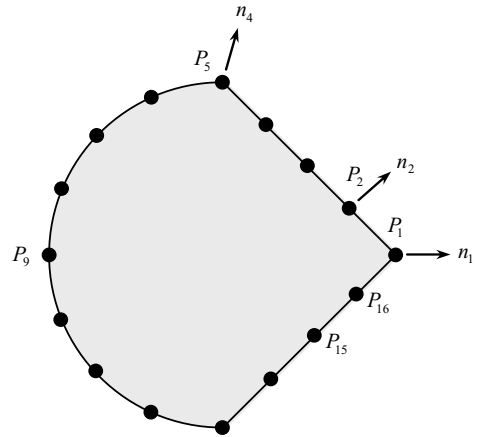


Fig. 4 Arbitrarily shaped, 2-D acoustic cavity discretized with 16 nodes.

뜻한다.

3.2 임의의 형상 음향 공동

본 예제에서는 Fig. 4와 같은 임의의 형상 음향 공동에 대해 본 연구에서 제안된 방법을 적용하였으며, 이를 위해 평판의 경계는 Fig. 4와 같이 16개의 노드들로 이산화되었다. 앞의 예제와 마찬가지로 코너 노드 점에서의 법선 방향은 양쪽 변의 두 법선 방향의 평균 값을 사용하였다.

Table 2는 본 논문에서 제안된 방법(Proposed

Table 2 Eigenvalues of the arbitrarily shaped acoustic cavity (parenthesized values denote errors (%) with respect to the values by NDIF method)

λ_i	Proposed method ($M = 24$)	NDIF method	FEM(ANSYS)
	16 nodes		441 nodes
1	1.958 (0.00)	1.958	1.968 (0.51)
2	2.026 (0.05)	2.025	2.032 (0.35)
3	3.082 (0.00)	3.082	3.106 (0.78)
4	3.633 (0.00)	3.633	3.670 (1.02)
5	3.996 (0.00)	3.996	4.036 (1.00)
6	4.578 (0.00)	4.578	4.657 (1.73)

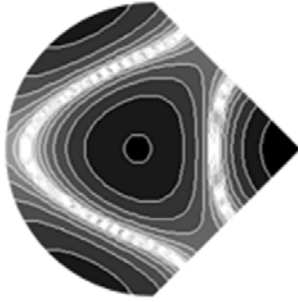


Fig. 5 5th mode shape of the arbitrarily shaped cavity when 16 nodes are used.

method), NDIF 법 및 FEM(ANSYS)에 의해 구해진 고유치 결과들을 보여준다. 그리고 고유치 바로 옆에 제시된 괄호 안의 값들은 NDIF 법에 대한 오차를 보여준다. 저자의 선행 연구⁽⁵⁾에서 NDIF 법이 FEM 보다 더 정확하다는 것이 검증되었기 때문에, Table 2에서 고유치들의 오차의 기준값으로 NDIF 법에 의한 결과들이 이용되었다.

Table 2에서 확인할 수 있듯이, 본 논문에서 제안된 방법(Proposed method)을 NDIF 법과 비교해볼 때 오차가 0.05% 이내로, 본 논문에서 제안된 방법은 임의의 형상 공동에 대해서도 매우 정확한 해석 결과를 제공함을 확인할 수 있다. 반면에 FEM 은 441 개의 많은 노드를 사용했음에도 불구하고, 상대적으로 큰 오차(최대 1.73%)를 보여주고 있음이 확인된다.

Fig. 5 는 본 논문에서 제안된 방법에 의해 구해진 다섯 번째 고유모드 형상을 보여준다. 고유모드 형상에서 흰색 부분은 음압이 최소인 노달 라인을 뜻한다. 본 논문에서는 생략되었지만 나머지 고유 모드들도 성공적으로 구해졌다.

4. 결론

본 논문에서는 NDIF 법을 응용/확장하여 2 차원 임의의 형상 음향 공동의 고정밀도 고유치와 고유모드를 효율적으로 구할 수 있는 방법이 제안되었다. 제안된 방법은 기존 NDIF 법의 단점을 성공적으로 극복하면서 기존 NDIF 법과 마찬가지로 매우 정확한 해를 제공함이 두 가지 검증 예제를 통해 확인되었다. 본 논문의 연구결과는 향후 3 차원 음향 공동의 고유치 해석 기법 개발에 큰 도움이 될 것이다.

후 기

이 논문은 2008 년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (KRF-2008-313-D00034).

참고문헌

- (1) Kang, S. W. and Lee, J. M., 1999, Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membrane Using Non-dimensional Dynamics Influence Function, *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 221, pp. 117~132.
- (2) Bathe, K., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey.
- (3) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, New York.
- (4) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamics Influence Function, *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.
- (5) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, Eigenmode analysis of arbitrarily shaped two-dimensional cavities by the method of point-matching, *Journal of the Acoustical Society of America*. Vol. 107, No. 3, pp. 1153~1160.
- (6) Kang, S. W. and Lee J. M., 2001, Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with clamped edges using wave-type functions, *Journal of Sound and Vibration*. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 242, No. 1, pp. 9~26.
- (7) Kang, S. W., 2002, Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with a mixed boundary condition using non-dimensional dynamic influence functions, *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 256, No. 3, pp. 533~549.
- (8) Kang, S. W. and Lee J. M., 2002, Free vibration analysis of composite rectangular membranes with an oblique interface, *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 251, No. 3, pp. 505~517.
- (9) Kang, S. W., Kim, I. S. and Lee, J. M., 2003, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Free Edges Using Non-dynamic Influence Functions, *Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering*. Vol. 13, No. 10, pp. 821-827.
- (10) Kang, S. W. 2004, Free vibration analysis of composite rectangular membranes with a bent interface, *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 272, No. 1, pp. 39~53.
- (11) Kang, S. W. and Lee J. M., 2004, Free vibration analysis of an unsymmetric trapezoidal membrane, *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 272, No. 2, pp. 450~460.
- (12) Kang, S. W., 2007, Free Vibration Analysis of Clamped Plates with Arbitrary Shapes Using Series Functions, *Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering*. Vol. 13, No. 10, pp. 531~538.
- (13) Kang, S. W., 2007, Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Polygonal Plates with Free Edges by Considering the Phenomenon of Stress Concentration at Corners, *Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering*. Vol. 17, No. 3, pp. 220~225.
- (14) Kang, S. W., Kim, I. S. and Lee, J. M., 2008, Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with smoothly varying free edges using NDIF method, *Journal of Vibration*

and Acoustics, Transaction of ASME. Vol. 130, No. 4, pp. 041010.1~041010.8.

(15) Kang, S. W. and Atluri, S. N., Development of Meshless Method for Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Free Plates using Local Polar Coordinates, Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 18, No. 6, pp. 674~680.

(16) Kang, S. W. and Kim, S. H., 2008, Vibration analysis of simply supported rectangular plates with unidirectionally, arbitrarily varying thickness, Journal of Sound and Vibration. Vol. 312, pp. 551~562.

(17) Kang, S. W. and Kim, J. G., 2009, A formulation of NDIF method to the algebraic eigenvalue problem for efficiently extracting natural frequencies of arbitrarily shaped plates with the simply supported boundary condition, Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 19, No. 6, pp. 607~613.

(18) Spiegel, M. R., 1983, Advanced Mathematics, McGraw-Hill, Inc, Singapore.

(19) Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., 1982, Matrix Polynomials, Academic Press, New York.

(20) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. Litton Educational Publishing, New York.