

# 비정규 공정에서의 누적합 관리도 적용에 관한 연구 A Study on the Application of CUSUM Control Charts under Non-normal Process

김 종 결\* · 엄 상 준\*\* · 최 성 원\*\*

## Abstract

Control chart is most widely used in SPC(Statistical Process Control), Recently it is a critical issue that the standard control chart is not suitable to non-normal process with very small percent defective. Especially, this problem causes serious errors in the reliability procurement, such as semiconductor, high-precision machining and chemical process etc. Procuring process control technique for non-normal process with very small percent defective and perturbation is becoming urgent. Control chart technique in non-normal distribution become very important issue.

In this paper, we investigate on research trend of control charts under non-normal distribution with very small percent defective and perturbation, and propose some variable-transformation methods applicable to CUSUM control charts in non-normal process.

**Keywords** : CUSUM Control Charts, Johnson Transformation, Non-normal process

## 1. 서 론

산업기술의 눈부신 성장을 거듭하여 선진국 진입을 눈앞에 두고 있는 우리나라는 점차 산업의 분야가 다양해지고 기술이 첨단화되며, 고객의 요구사항이 복잡해지고 있는 실정이다. 이런 시대적 상황에 발맞추어 기업들은 고객의 요구사항을 만족시키기 위해 기업경영과 기술개발 등 회사의 전 부문에 걸쳐서 다양한 기법들을 개발, 적용하고 있다. 그 중에서도 SPC는 현재 제조업에서 사용하는 가장 중요한 공정관리기법이다.

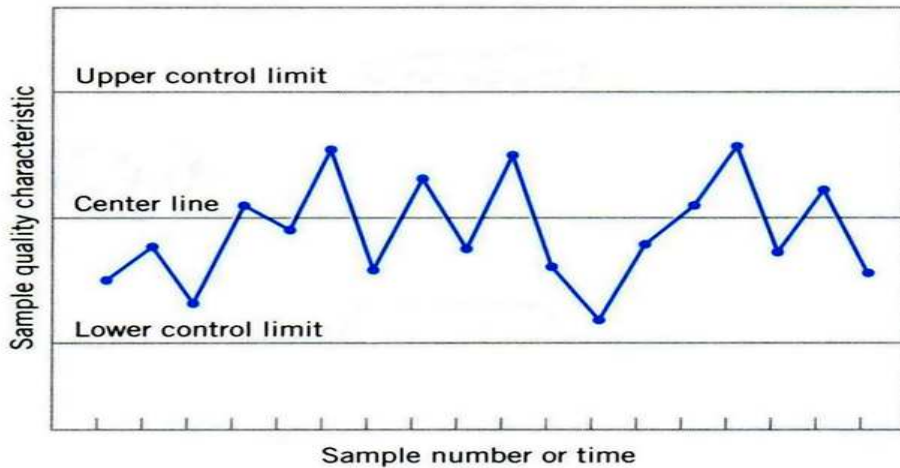
---

\* 성균관대학교 시스템경영공학과

\*\* 성균관대학교 산업공학과

관리도는 다양한 SPC기법 중에서도 로트(Lot) 단위의 공정에서 공정 이상 유무를 판단하는 가장 일반적이며 기본적인 기법이다.

관리도란 관리 상태에서 품질특성치의 목표 값을 나타내는 중심선(center line)과 중심선 상하에 한 쌍의 관리한계선(control limit), 그리고 관리하고자 하는 공정의 상태를 그래프로 나타낸 것을 말하며, 이것을 사용하는 방법을 관리도법(control chart methods)이라 한다. 아래의 [그림 1-1]은 관리도의 일반적인 형태이다.



[그림 1-1] 일반적인 Shewhart관리도

Shewhart 관리도는 1924년에 Bell 전화연구소의 Shewhart W. A.에 의하여 처음으로 소개되었다. Shewhart 관리도는 사용하기 쉽고 간단하면서도 공정이상을 감지하는 능력이 뛰어나다는 장점 때문에 수십 년이 지난 지금 까지도 사용되고 있다. 기존의 산업에서는 Shewhart 관리도만으로도 고객의 요구사항을 충족시킬 만큼 충분한 관리 능력을 지니고 있었다. 하지만 현대의 산업은 그 분야가 점점 다양해지며 첨단화되고 있다. 또한 그에 따라 고객의 요구사항은 점점 더 복잡해지고 있으며 까다로워지고 있다. 특히 반도체분야를 비롯하여 화학공정과 초정밀가공 등의 신뢰성확보를 핵심목표로 하는 분야에서 극소불량, 미세변동, 비정규 분포에 대한 공정관리기술 확보가 시급해지고 있으며 매우 중요한 연구 분야가 되었다. 예를 들어 화학 또는 의약품산업의 제조공정에서 공정의 미세한 변화가 제품에 큰 영향을 줄 수 있으며 기존의 Shewhart 관리도를 통해서 공정관리를 할 경우 기존의 샘플링 방법으로는 공정의 변화를 정확히 모니터링 할 수 없다. 또 그러한 샘플링 정보로는 공정의 미세한 변화를 찾아내기 힘들다.

이러한 문제점을 해결하기 위하여 여러 가지 연구가 진행되고 있으며, 누적합(CUSUM) 관리도는 그러한 해결책 중 하나이다.

누적합 관리도는 최소한의 샘플링정보를 가지고 공정의 미세한 변화를 훌륭하게 찾아내는 장점이 있다[39]. 하지만 지금까지는 다소 접근하기 어려운 이론체계와 복잡한

계산절차로 인하여 논문으로만 연구되어지고 있었고 실제적인 산업에서는 활용되지 못하였다.

본 논문에서는 극소불량과 미세변동을 빠르게 감지하는 적응성(adaptability)과 이상치(outlier)에 대한 거짓경보(false alarm)를 줄이는 강건성(robustness)을 제고하기 위하여 누적합 관리도를 제안하고, 누적합 관리도의 연구동향과 비정규 분포에서 변수변환 기법을 사용한 방법론을 조사해보고 대안을 제시하고자 한다.

## 2. 누적합 관리도의 고찰

누적합 관리도는 측정된 품질 특성치의 결과를 누적하여 산출한 값을 통해 공정의 변화를 판단하는 방법으로, 비교적 빠르게 공정의 변화를 탐지할 수 있다. Shewhart 관리도 보다 두 배정도 빨리 이동 상태를 감지한다. 즉, 공정이 관리상태일 때, 누적합 관리도는 목표 값으로부터 작은 변화를 잘 감지해낸다. 왜냐하면, 연속된 샘플데이터 값으로부터 정보를 종합하기 때문이다. 누적합 관리도에서의 타점은 목표 값으로부터 샘플 값을 뺀 차이의 누적 합으로써 이 점들은 0주위에 랜덤하게 분포되어 있어야 한다. 만일 타점의 추이가 위 또는 아래로 발견되었다면, 이는 프로세스의 평균에 변동이 있음을 뜻하고 이상요인을 찾아봐야 한다는 경고이다.

누적합 관리도는 Wald(1947)의 SPRT(Sequential Probability Ratio Test) 이론을 기초로 하여 정립된 것으로 Page(1954, 1961)에 의해 이론이 구체화 되었다[15][17]. 그는 품질특성의 분포에 있어서 모수의 변화를 검출하는 문제와 관측치를 이용하고자하는 규칙을 개발하기 위하여 ARL(Average Run Length)를 이용하였다. 또한 공정변화의 검출 방법으로 단측 또는 양측으로 모수의 변동을 검출하고자 하였다.

누적합 관리도는 샘플크기가  $n \geq 1$  일 때, 몇 개의 샘플정보를 합하였기 때문에 Shewhart 관리도 보다 공정이동이 작은 탐지를 위하여 효과적이며, 더구나 샘플의 크기가  $n = 1$  일 때 실무에서 효과적이다. 누적합 관리도에서 타점은 다음 식과 같다.

$$C_t^+ + \sum_{j=1}^t (\bar{Y}_j - \mu_0)$$

Tabular 누적합 관리도의 단측 통계적 상한 값과 하한 값은 다음과 같다.

$$C_t^+ = \max[0, x_t - (\mu_0 + k) + C_{t-1}^+]$$

$$C_t^- = \max[0, (\mu_0 - k) - x_t + C_{t-1}^-]$$

여기서 초기 값은  $C_0^+ = C_0^- = 0$  이다.  $k$ 는 참조 값이라고도 하며 평균  $\mu_1$ 에서 가피원인의 값과 목표 값  $\mu_0$ 와 차의 절대 값을 반으로 나눈 값이다.  $C_t^+$ 와  $C_t^-$ 의 상한

과 하한의 의사결정 간격  $H$ 는 부분군의 크기가  $n = 1$ 이며,  $\sigma = 1$  일 때 5를 권장한다. 누적합 관리도는 품질특성의 누적합이 의사결정간격  $H$ 를 벗어날 경우 그 이유를 찾아서 교정해야 하며, 누적합의 초기 값을 0으로 한다. Tabular 누적합 관리도는  $H = h\sigma$ ,  $K = k\sigma$  를 정의해야 하는데  $H = 4$ , 또는  $H = 5$ ,  $k = \frac{1}{2}$  을 추천한다.

### 3. 유관 논문 조사 방법

누적합 관리도와 지수가중치이동평균 관리도의 이론 체계를 정리하고자 NDSL을 포함한 총 9곳의 논문검색 Web-Site와 주요 저널에서 국내외 유관 논문을 수집하였다. 이론 체계를 정리하고 자하는 작업이므로 최초 1950년대의 논문부터 현재까지의 논문들을 고루 조사 하였고, 중복이 되는 연구주제는 배제하였다.

<표 3-1> 국내외 유관논문의 수집 경로

논문 검색 Web-Site	주요 저널
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ NDSL</li> <li>▪ Science Direct</li> <li>▪ IEEE Xplore</li> <li>▪ Emerald</li> <li>▪ Springer Link</li> <li>▪ JSTOR</li> <li>▪ Math SciNet</li> <li>▪ WSPC</li> <li>▪ Wiley Inter Science</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Journal of quality technology</li> <li>▪ Technometrics</li> <li>▪ Journal of the Royal Statistical Series A ~ D</li> <li>▪ Quality and Reliability Engineering International</li> <li>▪ International Journal of production research</li> <li>▪ Quality Engineering</li> <li>▪ Industrial Quality control</li> <li>▪ Quality progress</li> <li>▪ Biometrika</li> <li>▪ IEEE Transactions on Reliability</li> <li>▪ Journal of the American Statistical Association</li> <li>▪ The American Statistician</li> </ul>

### 4. 누적합 관리도의 연구 동향 분석

누적합 관리도의 논문 중 대표적인 논문 50 여 편을 조사하고 연구영역을 6가지로 분류 하여 정리하였다. 5가지 연구 영역은 다음과 같다.

1. 누적합 관리도의 이론적 배경
2. 누적합 관리도의 변형(Modification)에 관한 연구
3. 누적합 관리도를 설계하기 위한 접근방법
4. 누적합 관리도의 관리모수에 관한 연구
5. 다변량 누적합 관리도에 대한 연구

## 4.1 누적합 관리도의 이론적 배경

1954년 Page는 Wald의 SPRT의 아이디어를 기초로 누적합 관리도의 개념을 정립하였다[86]. 누적합 관리도는 여러 가지 분포의 모수를 다루고 있으나, 주로 정규분포이거나 지수분포일 경우를 전제로 연구되어 왔다. 누적합 관리도의 관리모수는 주로 평균과 분산, 실패비율(Failure rate) 등이 있으며 분포변환을 이용한 누적합 관리도 분야 또한 지속적으로 연구되어왔다[1]. 조사한 논문에서 누적합 관리도를 개선하고 평가하기 위해 사용한 기준이나 척도는 활용성(Utilization), 능률/효율성(Efficiency), 강건성(Robustness), 적응/조화성(Adaptivity) 등이 있다. 최근에는 의학, 화학, IT 등 다양한 분야에서 누적합의 이론을 적용, 응용한 논문들이 발표 되고 있으나 이 분야의 논문은 본 논문의 의도와 맞지 않아 동향조사에서 배제하였다.

## 4.2 누적합 관리도의 변형에 관한 연구

누적합 관리도 변형의 목적은 4가지 정도로 분류할 수 있다.

1. 민감도/효율(Sensitivity/Efficiency)의 개선
2. 이상치(outlier)에 대한 강건성(Robustification) 확보
3. 누적합 관리도의 사용편리성 확보
4. 정규분포가 아닌 다른 분포(Other Distribution)에 사용범위 확장(Extension)

### 4.2.1 민감도/효율의 개선

누적합 관리도의 민감도/효율을 개선하기 위해 다양한 방법론이 연구되어 왔으나 대표적인 방법론 3가지 정도를 소개하고자 한다.

#### 1. 관리도 통합(Combined Charts)

누적합 관리도는 공정의 작은 변화에 대하여 민감하다는 장점이 있으나 뜻하지 않은 공정의 큰 변화에 대해서는 그 민감성이 현저히 떨어진다. 이를 보완하기 위해 큰 변화에 민감한 Shewhart 관리도와 통합 방안에 대한 연구가 Westgard(1977)와 Lucas(1982)에 의하여 진행 되었다. Westgard(1977)은 임상화학(Clinical Chemistry)에서 내부정도관리(Internal Quality Control)를 위해 누적합 관리도와 Shewhart 관리도의 통합 방안을 제시하였다. Lucas(1982) 또한 Westgard(1977)의 시뮬레이션 결과를 참고로 하여 누적합 관리도와 Shewhart 관리도의 통합 계획과 최적의 ARL 곡선을 찾는 연구를 하였다[24][41].

## 2. 변형된 V-Mask(Modified V-Mask)

V-Mask는 누적합 관리도의 대표적인 두 가지 방법론 중 하나이다. 이 또한 공정의 큰 변화에 민감하지 못하다는 단점을 가지고 있다. Lucas(1973, 1976)와 Bissell(1979)는 V-Mask의 단점을 보완하기 위해 Parabolic V-Mask를 제안하였다[22][23][74].

## 3. FIR-CUSUM

Lucas, Crosier(1982)와 Kenett, Pollack(1983)는 공정의 비 관리상태(Out of Control) 일 때 빠른 첫 번째 반응(First Initial Response)을 보일 수 있는 방법을 연구했다. 이것은 공정이 잘 관리되고 있을 때는 그 효과가 미비하지만 공정이 잘 관리되어 있지 않을 때에는 큰 효과가 있다고 그의 논문에서 주장하였다[26].

### 4.2.2 이상치(outlier)에 대한 강건성(Robustification) 확보

데이터의 추정에서 이상치에 대한 강건성 확보의 중요성은 계속 언급되어 왔으나 학자들은 그 방법이 실제적으로 필요성이 있는가에 대한 의구심을 품어 왔다. Roche(1982, 1983)는 로버스트 추정(Robust Estimators)에 대해 기존의 전통적인 추정과 성능의 비교 방법을 제시 하였고, 실제 자연 과학(physical science)분야의 데이터와 분석 화학(analytical-chemistry)분야의 데이터에 적용하여 그 필요성을 입증했다 [12][14]. 이 연구의 발전으로 Roche(1989)는 절사평균(Trimmed means)의 개념을 사용하여 Robust 관리도를 제안하였다[13].

이밖에 이상치에 대한 누적합 관리도의 강건성 확보를 위해 연구된 대표적인 방법론으로 Lucas, Crosier(1982)의 FIR CUSUM과 Lucas(1985)의 Counted data CUSUM이 있으며, 이정형, 전태운(1999)은 자기상관을 갖는 공정에서 로버스트 누적합 관리도에 대한 연구를 하였다[2][25][26].

### 4.2.3 누적합 관리도의 사용편리성 확보

누적합 관리도는 공정의 미세변동에 민감하다는 장점이 있으나 복잡한 이론체계로 관리도를 설계, 운용하는데 어려움이 있다. Munford(1980)는 이런 단점을 보완하고자 누적합 관리도에 Scoring System을 적용한 누적점수 관리도(Cumulative Scores Control Chart)를 제시 하였다[5]. 누적점수 관리도는 누적합 관리도에서 표본평균들을 누적하는 대신 표본 평균을 크기에 따라 이산형 변수로 바꾸고 이를 누적하여 누적된 값이 주어진 한계를 벗어나면 공정평균에 변화가 있다고 판단하는 방법이다. 이는 누적합 관리도와 비슷한 수행도를 갖으면서도 -1, 0, 1 과 같은 이산화된 변수를 누적하기 때문에 현장에서 사용하기 쉽다는 장점이 있다[3]. 하지만 누적점수 관리도만으로는 공정의 큰 변동에 대한 민감도가 떨어지므로 이를 보완하기 위해 Ncube, Woodall(1984)는 Shewhart 와 누적점수 관리도를 결합하는 방안을 제시하였다.[33]

#### 4.2.4 정규분포가 아닌 다른 분포에 사용범위 확장(Extension)

대부분의 통계적 공정관리는 정규분포를 가정하여 그 연구가 되고 있다. 누적합 관리도도 예외는 아니다. 계수형 데이터는 보통의 표준정규분포가 아닌 지수, 포아송 분포 등 다른 분포를 이루는 경우가 많다. James M. Lucas(1985)는 이런 경우에 누적합 관리도를 적용하기 위해 FIR 누적합 관리도와 로버스트 누적합 관리도를 응용하였다[25].

### 4.3 누적합 관리도를 설계하기 위한 접근방법

누적합 관리도를 설계하기 위해 접근 방법을 두 가지로 분류할 수 있다.

1. 통계적 설계(Statistical Design)
2. 경제적 설계(Economic Design)

#### 4.3.1 통계적 설계(Statistical Design)

통계적 설계는 누적합 관리도의 ARL에 대한 연구라고 할 수 있겠다. ARL은 관리도가 제대로 된 성능을 발휘하고 있는가에 대한 척도이다.  $ARL_0$ 는 공정이 관리 상태인 경우인데도 불구하고 공정이 이상이 있다고 경고 할 때까지의 간격이며 일반적으로 약 370이 최적이라고 알려져 있다.  $ARL_1$ 는 공정에 이상이 있을 때 공정이 이상이 있다고 경고 할 때까지의 간격이며 일반적으로 약 1~2%이 최적이라고 알려져 있다. 통계적 설계는 다음과 같이 3가지 연구영역이 있다.

##### 1. 접근 방법(Approach Method)에 대한 연구

접근 방법에 대한 연구는 또 다시 3가지 방법론으로 분류 할 수 있다.

(1) Method of SPRT : SPRT 이론으로 접근한 ARL 설계 방법은 Siegmund(1985)의 Sequential Analysis 이론을 바탕으로 Woodall, Adams(1993)가 그 방법을 정립하였으며, 그 이전부터 Page(1959), Ewan, Kemp(1960), Goel, Wu(1971), Kemp(1971)로부터 연구되어왔다[9][29][36][40][44][16].

(2) Method of Markov Chain : Brook, Evans(1972)는 관리 상태부터 비 관리 상태까지의 영역을 모두 Markov Chain 방법을 사용하여 접근하였으며, Woodall(1984)또한 Two-Sided 방식에서 Markov Chain 방법을 사용해 ARL 설계방안을 연구하였다[11][43].

(3) Method of Hawkins : Hawkins(1992)는 누적합 관리도 설계에 있어서 다소 복잡한 절차를 좀 더 쉽게 하기 위한 노력을 하였다. 그럼에도 불구하고 그 결과는 정확하게 유지하기 위한 노력을 하였으며, 그의 논문에 의하면 실제 ARL과의 오차범위는 1~3% 정도라고 한다[20].

## 2. Test Types에 따른 ARL 연구

누적합 관리도는 그 Test Types에 따라 One-Sided 와 Two-Sided 방식으로 나눌 수 있으며 각각의 방식에 따른 ARL 설계에 대한 연구가 다음과 같이 진행되고 있다.

(1) One-Sided : 대부분의 누적합 관리도는 Two-Sided 에 초점이 맞춰져 있다. 하지만 특별한 상황, 예를 들면 품질특성치가 망대특성 또는 망소특성일 경우 One-Sided 방식은 Two-Sided 방식보다 유용하게 쓰인다. 이 분야에 대한 연구는 Ewan, Kemp(1960), Reynolds(1975), Kahn(1978), Woodall(1983)에 의해서 연구되고 있다[28][32][40][42].

(2) Two-Sided : 일반적인 누적합 관리도의 유형이다. 이 분야에 대한 연구는 Kemp(1971), Nadler, Robins(1971), Lucas, Crosier(1982), Woodall(1984)에 의해서 연구되고 있다[21][26][29][43].

## 3. 분포 특성에 따른 ARL 연구

보통의 누적합 관리도는 기본적으로 정규분포를 가정하고 연구되고 있다. 하지만 품질 특성치는 반드시 정규분포만을 따르지 않는으므로 다른 분포에 대한 ARL 연구가 시급하다.

(1) 정규 분포(Normal Dist.) : 처음 누적합 관리도의 개발은 Page(1954,1961)에 의해서 연구가 이루어 졌으며 통계적 기본 개념은 당연히 정규분포를 가정 하여 연구가 시작되었다[17][86].

(2) 지수 분포(Exponential Dist.) : 품질 특성치는 반드시 정규분포를 따르지 않는다. 그리하여 최근에는 정규분포가 아닌 비정규분포에 대한 연구가 주목되고 있다. 그 중에 지수분포는 정규분포 다음으로 주로 연구되는 분포이다. 이 분야에 대한 연구는 Lorden, Eisenberger(1973), Vardeman, Ray(1985)에 의하여 연구되고 있다[19][38].

### 4.3.2 경제적 설계(Economic Design)

누적합 관리도의 경제적 설계는 주로 어떤 요인을 고려하여 경제성을 높일 것인가에 대해서 연구되어 왔다.

Duncan(1956)은  $\bar{X}$  관리도에서 이상요인(Assignable cause)을 경제적으로 발견하기 위해

첫째, 얼마나 큰 샘플을 취할 것인가?

둘째, 어떻게 샘플 간격을 선택할 것인가?

셋째, 몇 배수의  $\sigma$ 를 사용하여 관리선을 결정할 것이냐?

에 대한 접근으로 경제적 설계를 연구하였다[6].

Goel, Wu(1968)은 Duncan(1956)의 연구를 기반으로  $\bar{X}$  관리도에서 샘플 사이즈, 관리선을 결정하기 위한 요인, 샘플링 간격을 고려해 손실 비용을 계산하는 것으로 경제적 설계를 도모하였다[8]. 또한 Goel, Wu(1973)은 이 연구의 확장으로 누적합 관리도에서의 경제적 설계도 연구하였는데 Pattern-Search 기술을 사용해서 최적의 샘플 사



이즈, 샘플링 간격, 관리선을 결정하는 절차를 연구하였다. 또한 매개변수 설계에 따른 비용과 공정과 관련되어진 리스크요인을 함께 고려하였다[10].

Taylor(1968)는 누적합 관리도를 사용하는 공정이 비 관리상태일 때 공정수리비용, 작동비용, 유지비용을 고려한 경제적 설계를 연구하였다[31]. Taylor(1968)의 연구에 이어 Duncan(1971)은 기존의 연구를 확장하여  $\bar{X}$  관리도를 기반으로 하는 공정에서 이상요인이 여러 개일 경우 경제적 설계를 연구하였다.[7] Chiu(1973)는 Duncan(1956,1971)의 논문에서 몇 가지 수정을 통해서 좀 더 효과적으로 최적 관리 매개변수를 결정하는 연구를 하고 비교를 통해 타당성을 제시하였다.[46] 앞서 소개한 Taylor(1968), Duncan(1956,1971), Chiu(1973)의 경제적 설계를 반으로 Chiu(1974)는 공정에서 누적합 관리도를 사용할 때 경제적 설계 방안을 연구하였다.[47]

#### 4.4 누적합 관리도의 관리모수에 관한 연구

본 논문에서 다루어진 누적합 관리도 관련 논문을 살펴보면 누적합 관리도에서 주로 다루고자하는 관리모수에 대한 종류와 동향을 알 수 있다. 누적합 관리도의 연구에서 주로 다루어지는 관리모수는 평균, 분산, 실패 비율에 대한 것이며, 때때로 정규분포가 아닌 다른 분포일 경우에 관리 모수에 대한 연구를 찾아 볼 수 있다.

#### 4.5 다변량(multivariate) 누적합 관리도에 대한 연구

다변량 누적합 관리도에 대한 연구 분야 중 대표적인 영역은 3가지가 있다.

(1) 시계열(Time-Series) : Alwan, Roberts(1988)는 다변량 데이터에 대한 Shewhart 관리도, 누적합 관리도, 지수가중치이동평균(EWMA) 관리도의 설계를 위하여 시계열 분석의 사고방식을 기초로 한 ARIMA Models을 사용하였다[30].

(2)  $T^2$  누적합 관리도 : Woodall, Ncube(1985)는 Hotelling's의  $T^2$  관리도 절차를 활용하여 다변량 누적합 관리도의 ARL을 설계 하였다[45].

(3) 누적합 관리도의 벡터(Vector) : Crosier(1986,1988)는 Two-Sided 누적합 관리도에서 일변량과 다변량 모수에 대한 비교 연구를 통해 다변량 누적합 관리도에 대한 연구의 필요성을 제시하고, 그 대안으로 모수에 대해서 벡터의 개념을 사용하였다. 스칼라(Scalar) 누적합 관리도와 벡터 누적합 관리도의 성능을 비교하여 연구의 타당성을 제시하였다[34][35].

## 5. 존슨의 변수변환방법

### 5.1 변환방법

비정규분포를 따르는 공정을 정규분포로 변환하는 변수변환방법 중 존슨에 의해 제시된 존슨분포의 변환식을 소개하겠다.[27] 존슨분포는 그 형태에 따라서 세 가지 분포족을 갖기 때문에 Slifker와 Shapiro의 표본 백분위수를 이용하여 분포족의 형태를 결정하였다[37].

### 5.2 존슨분포

존슨분포는 비정규분포를 모형화하는데 사용되었다. 주어진 공정에 가장 좋은 분포를 선택하는데 단순한 구조를 보여주기 때문에 다른 방법보다 일반적으로 쉽다고 Farnum은 그의 논문에서 주장하였다[18]. 존슨분포의 가장 큰 특징 중 하나는 표준 정규곡선으로 변환하여 사용하는 확률계산이다. 이러한 존슨분포는 식(5.1)의 변환식과 식(5.2) ~ 식(5.4)인 3가지 분포족(family of distribution)을 갖는다.

$$X' = \gamma + \eta K_i(X, \lambda, \epsilon) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

$$K_1(X, \lambda, \epsilon) = \sinh^{-1}\left(\frac{X - \epsilon}{\lambda}\right) \quad (5.2)$$

$$K_2(X, \lambda, \epsilon) = \ln\left(\frac{X - \epsilon}{\lambda + \epsilon - X}\right) \quad (5.3)$$

$$K_3(X, \lambda, \epsilon) = \ln\left(\frac{X - \epsilon}{\lambda}\right) \quad (5.4)$$

특성치  $X$ 를  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$ ,  $\epsilon$ 의 적절한 모수선택에 의해  $X'$ 로 변환시킬 수 있다.  $\epsilon$ ,  $\gamma$ 은 위치모수(location parameter)이며,  $\lambda$ ,  $\eta$ 은 척도모수(scale parameter)이다.

### 5.3 존슨변환(Johnson Transformation)

존슨변환의 3가지 분포족은  $S_B, S_L, S_U$ 이다. 식(5.2)은 곡선으로 정의역이 전 실 직선이 되며, 식(5.3)은 곡선으로 개구간  $(\epsilon, \epsilon + \lambda)$ 에 대해 정의되는 곡선이다. 식(5.4)은 (대수정규)곡선을 나타낸다. <표 5.1>은 특성치 를 변환시키는 변수 에 대한 변환식과 모수 조건들이 포함되어 있다. 존슨의 변환식을 이용하기 위하여 <표 3.1>의 3가지 분포족 중 하나를 선택해야 한다. 또한 모수도 추정해야 한다. 분포족 중 1가지를 선택하는 많은 방법 중 적용방법이 간단한 분위수 방법을 이용한다.

<표 5-1> 존슨변환

존슨분포족	변환식	모수조건	X의 범위
$S_B$	$X' = \gamma + \eta \ln \left( \frac{X - \epsilon}{\lambda + \epsilon - X} \right)$	$\eta, \lambda > 0$ $-\infty < \gamma < \infty$ $-\infty < \epsilon < \infty$	$\epsilon < X < \epsilon + \lambda$
$S_L$	$X' = \gamma + \eta \ln(X - \epsilon)$	$\eta > 0$ $-\infty < \gamma < \infty$ $-\infty < \epsilon < \infty$	$X > \epsilon$
$S_U$	$X' = \gamma + \eta \sinh^{-1} \left( \frac{X - \epsilon}{\lambda} \right)$	$\eta, \lambda > 0$ $-\infty < \gamma < \infty$ $-\infty < \epsilon < \infty$	$-\infty < X < \infty$

존슨변환은 형태에 따라서 3가지 변환식으로 구성되어 있어서, 다른 변환방법에 비해 정확한 변환을 할 수 있으며 대부분의 비정규분포에서 적용가능하기 때문에 범용성을 갖는다는 장점이 있다. 다음 표는 지금까지 개발된 변수변환식과 개발자들이 나타나있다.

<표 5-2> 변수변환방법

개발자	변환식
Tukey (1959)	$y = X^\lambda$
Box & Cox (1964)	$y = \frac{X^\lambda - 1}{\lambda}, \lambda \neq 0$ $y = \log X, \lambda = 0$
Draper & Cox (1969)	$y = X^{0.268}$
Taylor (1985)	$y = X^{0.2654}$
Nelson (1994)	$y = X^{0.2777}$
Rodriguez (1992)	존슨(Johnson)변환
Kittlitz (1999)	$y = X^{1/4}$

1999년에 Kittlitz가 개발한 변환식은 지수분포를 따르는 공정에서 적용이 가능한 것이다. 마찬가지로 존슨변환식을 제외한 대부분의 변환식은 일부 비정규분포에서만 적용가능하다. 하지만 존슨변환은 거의 모든 비정규분포에 적용할 수 있다. 존슨변환의 적용절차는 QR(quantile ratio)계산 그리고 분포족 선택, 마지막으로 변환식의 적용(데이터변환)으로 전개된다.

## 6. 결 론

본 논문에서도 알 수 있듯이 최근 공정관리기법의 연구에서 가장 이슈가 되고 있는 부분은 극소불량, 미세변동의 특성을 가지는 공정에서 어떻게 민감도를 향상시키면서 강건성을 유지할 것인가에 대한 연구 영역과 최근 그 비중이 점차 확대되어가고 있는 비정규공정에 대해 어떻게 대응할 것인가에 대한 연구이다. 비정규공정에 대한 대응방안은 다양한 영역과 방법론이 연구되어 지고 있으나 본 논문에서는 그 활용범위가 넓은 변수변환방법을 제시하였고, 그 중에서도 다양한 형태의 비정규 분포에서 활용이 가능한 존슨변환에 대해서 조사해 보았다. 변수변환방법과 누적합 관리도를 잘 활용한다면 극소불량과 미세변동, 비정규 공정에 대해서 복합적으로 대응 가능한 관리도 기법을 개발할 수 있을 것이라 기대한다.

추후 연구방안으로는 변수변환방법과 누적합 관리도 기법의 통합 방안과 그 타당성을 입증하기 위한 사례연구를 제안한다.

## 7. 참 고 문 헌

- [1] 김종결, 엄상준, 최성원 “누적합 관리도의 이론적 전개와 동향 분석”, 대한안전경영과학회 2010년도 춘계학술대회, 2010, pp.537-538
- [2] 이정형, 전태운, 조신섭, “자기상관을 갖는 공정의 로버스트 누적합관리도”, 품질경영학회지, v.27 no.4, 1999, pp.123-142
- [3] 최인수, 이운동, “단방향 누적점수관리도의 설계”, 품질경영학회지, v.26, no.3, 1998, pp.31-45
- [4] A. F. Bissell, “A Semi-Parabolic Mask for Cusum Charts”, Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician), v.28, no.1, 1979, pp.1-7
- [5] A. G. Munford, “A Control Chart Based on Cumulative Scores”, Journal of the Royal Statistical Society, v.29 no.3, 1980, pp.252-258
- [6] A. J. Duncan, “The Economic Design of  $\bar{X}$  Charts used to maintain current control of a process”, Journal of the American Statistical Association, v.51 no.274, 1956, pp.228-242
- [7] A. J. Duncan, “The Economic Design of  $\bar{X}$ -Charts When There is a Multiplicity of Assignable Causes”, Journal of the American Statistical Association, v.66 no.333, 1971, pp.107-121
- [8] A. L. Goel, S. C. Jain, S. M. Wu, “An Algorithm for the Determination of the Economic Design of X-Charts Based on Duncan’s Model”, Journal of the American Statistical Association, v.63 no.321, 1968, pp.304-320
- [9] A L. Goel, S. M. Wu, “Determination of A.R.L and a Contour Nomogram for Cusum Charts to Control Normal Mean”, Technometrics, v.13 no.2, 1971, pp.221-230

- [10] A. L. Goel, S. M. Wu, "Economically Optimum Design of CUSUM Charts", *Management Science*, v.19 no.11, 1973, pp.1271-1281
- [11] D. Brook, D. A. Evans, "An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length", *Biometrika*, v.59 no.3, 1972, pp.539-549
- [12] D. M. Roche, "Robust Statistical Analysis of Interlaboratory Studies", *Biometrika*, v.70 no.2, 1983, pp.421-431
- [13] D. M. Roche, "Robust Control Charts", *Technometrics*, v.31 no.2, 1989, pp.173-184
- [14] D. M. Roche, G. W. Downs, A. J. Roche, "Are Robust Estimators Really Necessary?", *American Statistical Association and American Society for Quality*, v.24 no.2, 1982, pp.82-101
- [15] E. S. Page, "Continuous Inspection Schemes", *Biometrika*, v.41, n.1/2, 1954, pp.100-115
- [16] E. S. page, "The Distribution of Vacancies on a Line", *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, v.21, no.2, 1959, pp.364-374
- [17] E. S. page, "Cumulative Sum Charts", *Technometrics*, v.3 no.1, 1961, pp.562-593
- [18] Farnum, N. R., "Using Johnson Curves to Describe Non-normal Process Data", *Quality Engineering*, Vol.9, no.2, 1996-1997, pp.329-336
- [19] G. Lorden, I. Eisenberger, "Detection of Failure Rate Increases", *Technometrics*, v.15 no.1, 1973, pp.167-175
- [20] Hawkins. D. M., "A Fast, Accurate Approximation of Average Run Lengths of CUSUM Control Charts", *Journal of Quality Technology*, v.24, no.1, 1992, pp.37-43
- [21] Jack Nadler, Naomi B. Robbins, "Some Characteristics of Page's Two-sided Procedure for Detecting a Change in a Location Parameter", *The Annals of Mathematical Statistics*, v.42, n.2 1971, pp.538-551
- [22] J. M. Lucas, "A Modified "V" Mask Control Scheme", *Technometrics*, v.15 no.4, 1973, pp.833-847
- [23] J. M. Lucas, "The Design and Use of Cumulative Sum Quality Control Schemes", *Journal of Quality Technology*, v.8, no.1, 1976, pp.1-12
- [24] J. M. Lucas, "Combined Shewhart-CUSUM Quality Control Schemes", *Journal of Quality Technology*, v.14, no.2, 1982, pp.51-59
- [25] J. M. Lucas, "Counted Data CUSUM's", *American Statistical Association and American Society for Quality*, v.27 no.2, 1985, pp.129-144
- [26] J. M. Lucas, R. B. Crosier, "Fast Initial Response for CUSUM Quality-Control Schemes: Give your CUSUM a Head Start", *Technometrics*, v.24 no.3, 1982, pp.199-205

- [27] Johson, N. L., "System of Frequency Curves Generated by Methods of Translation", *Biometrika* Vol. 36, 1949, pp.149-176
- [28] Khan, R. A., "Wald's Approximations to the Average Run Length in CUSUM Procedures", *Journal of Statistical Planning and Inference*, v.2, 1978, pp.63-77
- [29] K. W. Kemp, "Formal Expressions which can be applied to Cusum Charts", *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, v.33, no.3, 1971, pp.331-360
- [30] Layth C. Alwan, Harry V. Roberts, "Time-Series modeling for Statistical Process Control", *Journal of Business & Economic Statistics*, v.6 no.1, 1988, pp.87-95
- [31] L. D. Taylor, "The Economic Design of Cumulative Sum Control Charts", *Technometrics*, v.10 no.3, 1968, pp.479-488
- [32] M. R. Reynolds, Jr, "Approximations to the Average Run Length in Cumulative Sum Control Charts", *Technometrics*, v.17, no.1, 1975, pp.65-71
- [33] M. M. Ncube, W. H. Woodall, "A Combined Shewhart-Cumulative Score Quality Control Chart", *Journal of the Royal Statistical Society*, v.33 no.3, 1984, pp.259-265
- [34] R. B. Crosier, "A new two-sided Cumulative Sum Quality Control Scheme", *Technometrics*, v.28 no.3, 1986, pp.187-194
- [35] R. B. Crosier, "Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-control schemes", *Technometrics*, v.30 no.3, 1988, pp.291-303
- [36] Siegmund. D, *Sequential Analysis: Tests and Confidence Intervals*, Springer-Verlag, New York, 1985
- [37] Slifker, J. F. and Shapiro, S. S., "The Johnson System: Selection and Parameter Estimation". *Technometrics* Vol.22, 1980, pp.39-246.
- [38] S. Vardeman, Di-ou Ray, "Average Run Lengths for CUSUM Schemes When Observations are Exponentially Distributed", *Technometrics*, v.27 no.2, 1985, pp.145-150
- [39] W. D. Ewan, "When and How to Use Cu-Sum Charts", *Technometrics*, v.5 no.1, 1963, pp.1-22
- [40] W. D. Ewan, K. W. Kemp , "Sampling Inspection of Continuous Processes with No autocorrelation Between Successive Results", *Biometrika*, v.47 no.3, 1960, pp.363-380
- [41] Westgard et al., "Combined Shewhart-cusum control chart for improved quality control in clinical chemistry", *Clinical chemistry*, v.23 no.10, 1977, pp.1881-1887
- [42] W. H. Woodall, "The Distribution of the Run Length of One-Sided CUSUM Procedures for Continuous Random Variables", *Technometric*, v.25, n.3 1983, pp.295-301
- [43] W. H. Woodall, "On the Markov Chain Approach to the Two-Sided CUSUM

- Procedure", *Technometrics*, v.26, n.1 1984, pp.41-46
- [44] W. H. Woodall, Benjamin M. Adams, "The Statistical Design of CUSUM Charts", *Quality Engineering*, v.5, no.4, 1993, pp.-559-570
- [45] W. H. Woodall, M. M. Ncube, "Multivariate CUSUM Quality-Control Procedures", *Technometrics*, v.27 no.3, 1985, pp.285-292
- [46] W. K. Chiu, "Comments on the Economic Design of  $\bar{X}$ -Charts", *Journal of the American Statistical Association*, v.68 no.344, 1973, pp.919-921
- [47] W. K. Chiu, "The Economic Design of Cusum Charts for Controlling Normal Means", *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, v.23 no.3, 1974, pp.420-433