

전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법을 이용한 탄소성해석

Analysis of Elasto-Plastic Problems Using the Generalized Finite Element Method with Global-Local Enrichment Functions

한 소 정* · 김 희 철** · 이 영 학*** · 김 대 진****
Han, So Jeong · Kim, Heecheul · Lee, Young Hak · Kim, Dae-Jin

요 약

본 논문에서는 국부적으로 비선형 거동을 보이는 고전적인 J_2 소성흐름 이론에 근거한 탄소성 문제의 해를 효율적으로 구하기 위해 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법을 제안한다. 제안된 기법은 비선형 거동을 보이는 영역을 포함하는 국부 문제의 비선형 해를 구하고 이를 일반유한요소법의 단위 오목 분할의 개념을 통해 전체 문제의 해 공간을 확장하는데 이용한다. 이는 적은 계산량으로 복잡한 탄소성문제의 정확한 해를 얻는 것을 가능하게 하며 기법의 강건성과 정확성을 입증하기 위한 수치해석 예제가 다루어진다.

keywords : 일반유한요소법, 전체-국부 확장함수, 탄소성해석, 국부적 비선형 거동

1. 서 론

국부적으로 비선형 거동을 보이는 탄소성 해석에 현재 널리 사용되고 있는 유한요소법을 이용할 경우 국부 영역을 중심으로 요소의 세분화 및 비선형 해를 구하기 위해 많은 뉴턴-랩슨 기법(Newton-Rhapson method)을 이용해 수많은 반복(iteration) 과정을 실시해야 하기 때문에 이의 계산량이 무척 많다. 따라서 실무에서는 많은 경우 해의 정확성이 떨어짐에도 불구하고 단순화된 선형 탄성 해석으로 이를 대체하는 경우가 많다. 본 논문에서는 국부적으로 비선형 거동을 보이는 탄소성 해석의 계산량을 줄이면서도 정확한 해를 구할 수 있는 전체-국부 확장함수(global-local enrichment function)를 지닌 일반유한요소법(generalized finite element method)을 제안한다.

2. 탄소성 해석의 정식화

본 논문에서 수행되는 탄소성해석과 관련된 몇몇 개념과 수식을 소개한다. 이들은 선형 등방 경화(linear isotropic hardening)와 작은 변형률(small strain)을 가정한 고전적인 J_2 소성흐름 이론(flow theory)에 근거하고 있다(Simo and Hughes, 2000). 힘의 평형을 묘사하는 편미분방정식은 3차원 영역(domain)

* 학생회원 · 경희대학교 건축공학과 석사과정 hansj@khu.ac.kr
** 정회원 · 경희대학교 건축공학과 교수 kimhc@khu.ac.kr
*** 정회원 · 경희대학교 건축공학과 조교수 leeyh@khu.ac.kr
**** 정회원 · 경희대학교 건축공학과 전임강사 djkim@khu.ac.kr

$\bar{\Omega}_G = \Omega_G \cup \partial\Omega_G$ 에 정의되며 이의 경계는 $\partial\Omega_G^u \cap \partial\Omega_G^t = 0$ 를 만족시키는 두 가지 영역의 합 $\partial\Omega_G = \partial\Omega_G^u \cup \partial\Omega_G^t$ 으로 구성된다. 영역 Ω_G 에 정의된 힘의 평형 방정식은

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (1)$$

으로 정의되며 경계 조건은 $\partial\Omega_G$ 에

$$u = \bar{u} \text{ on } \partial\Omega_G^u, \quad \sigma \cdot n = \bar{t} \text{ on } \partial\Omega_G^t \quad (2)$$

으로 주어진다. n 은 $\partial\Omega_G$ 에 직교하는 바깥 방향으로의 단위 벡터이며 \bar{t} 와 \bar{u} 는 경계치 문제의 주어진 견인력(traction)과 변위(displacement)이다. 변형률 텐서는 변위 기울기 텐서(gradient tensor)의 대칭 부분으로 표현되며

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (3)$$

다음과 같은 탄성 및 소성 기여분의 합 분해(additive decomposition)에 근거한다.

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (4)$$

응력 텐서 σ 는 단지 탄성 변형률 텐서 ϵ^e 에 비례하며 다음의 식으로 주어진다.

$$\sigma = C: \epsilon^e = \left(\kappa [1 \otimes 1] + 2\mu \left[I + \frac{1}{3} 1 \otimes 1 \right] \right) : \epsilon^e \quad (5)$$

κ 는 체적탄성률을, μ 는 전단탄성계수를, I 는 4차 단위 텐서 그리고 I 는 2차 단위 텐서를 의미한다. 허용 가능한 응력 상태는 다음과 같은 von Mises 항복 조건에 의해 정의된다.

$$f(\sigma, \alpha) = \| dev[\sigma] \| - \sqrt{\frac{2}{3}} K(\alpha) \leq 0 \quad (6)$$

$\| \cdot \|$ 는 텐서의 유클리디언 노름(Euclidean norm)을, $dev[\cdot]$ 은 텐서의 편차(deviatoric)부분을, α 는 내부 상태 변수(internal state variable)을, $K(\alpha)$ 는 선형 등방 경화 관계식을 의미한다. 묘사된 탄소성 문제는 변형률 경로(strain history)에 의존하는 비선형 재료모델에 의한 비선형 거동을 보인다. 따라서 뉴턴-랩슨 방법에 의해 선형화되고 점진적인(incremental) 방법으로 이의 해를 구해야 한다. 속도에 무의존하는(rate-independent) 소성론의 관점에서 각각의 증분 단계는 유사 시간 스텝(pseudo time step) t^n 으로 정의되며 주어진 변형률 증가 $\Delta\epsilon = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n$ 에 해당하는 항복조건과 일관된 응력 텐서 σ_{n+1} 는 radial return mapping 알고리즘에 의해 구해진다(Simo and Taylor, 1985).

3. 탄소성 해석을 위한 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법

본 장에서는 비선형 거동이 국부적으로 나타나는 문제에 대해 확장함수를 구성하는 과정을 소개하며 이들 중 특히 3차원 탄소성해석 문제에 초점을 맞춘다. 확장함수를 구성하기 위한 전체-국부 과정(global-local procedure)은 (Kim et al. 2010)에 소개된 것과 유사하나 국부소성영역을 지나는 탄소성 문제의 해석에 적합하도록 수정이 필요하다. 이 수치해석 방법의 주된 개념은 국부적인 비선형 거동을 정확하게 묘사할 수 있는 확장함수를 수치해석적으로 구성하고 이를 전체 비선형 해공간을 확장시키기 위해 사용한다는 것이다. 이 과정은 세 단계로 구성되어 있으며 그림 1에 나타나 있다. 첫 번째 단계는 선형탄성 재료모델을 가정하고 최종 유사 시간 스텝의 하중을 적용시켜 전체 문제(global problem)을 푸는 것이다. 두 번째 단계는 그림 1(b)과 같이 비선형 거동을 보이는 작은 영역을 포함하는 국부 문제(local problem)를 구성하고 이전 단계에서 구한 전체문제의 선형 탄성해를 이 문제의 경계조건으로 적용하는 것이다. 국부 문제의 해는 최종 시간 스텝에서의 국부적인 비선형 거동을 잘 묘사할 수 있다. 이후 전체 문제는 이전 단계에서 구해진 비선형 국부 문제의

해로 확장(enrichment)되며 그림 1(c)가 나타내는 것처럼 각각의 시간 스텝에서의 해를 구한다.

위에 언급된 과정을 수학적으로 엄밀하게 표현하기 위해 다음의 표기 방법을 이용한다. 아래첨자 G와 L은 각각 전체 및 국부 문제를 가리키며 추가의 아래첨자 lin은 선형탄성 재료모델을 이용해 얻어진 해를 의미한다. 아래첨자 lin이 사용되지 않는 경우 탄소성 재료모델을 이용해 얻어진 해를 가리킨다. 위첨자 n은 각각의 유사 시간 스텝 t^n , $n=1, \dots, n_{\max}$ 을(n_{\max} 는 유사 시간 스텝의 최대값) 지칭하기 위해 사용된다.

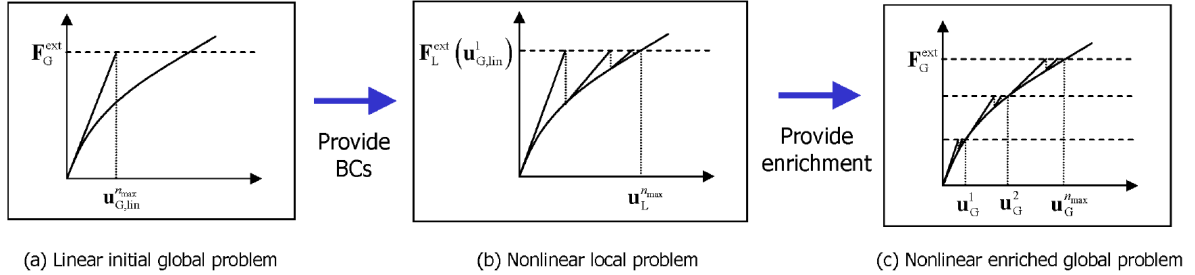


그림 1 탄소성 해석을 위한 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소 알고리즘.

3.1. 선형 초기 전체 문제

일반유한요소법의 해 $u_{G,lin}^{n_{\max}}$ 는 식 (1)과 (2)에 의해 정의되는 문제의 최종 시간 스텝 $t_{n_{\max}}$ 에서의 해로 선형 탄성 재료 모델을 가정하고 다음과 같이 구한다:

$$\forall v_{G,lin}^{n_{\max}} \in X_{G,lin}^{n_{\max}}(\Omega_G) \text{에 대해 } u_{G,lin}^{n_{\max}} \in X_{G,lin}^{n_{\max}}(\Omega_G) \subset H^1(\Omega_G) \text{을 만족시키는 다음 적분식의 해 } u_{G,lin}^{n_{\max}} \text{를 구하라.}$$

$$\int_{\Omega_G} \sigma(u_{G,lin}^{n_{\max}}) : \epsilon(v_{G,lin}^{n_{\max}}) dx + \eta \int_{\partial\Omega_G} u_{G,lin}^{n_{\max}} \cdot v_{G,lin}^{n_{\max}} ds = \int_{\partial\Omega_G} \bar{t}^{n_{\max}} \cdot v_{G,lin}^{n_{\max}} ds + \eta \int_{\partial\Omega_G} \bar{u}^{n_{\max}} \cdot v_{G,lin}^{n_{\max}} ds, \quad (7)$$

$X_{G,lin}^{n_{\max}}(\Omega_G)$ 는 Ω_G 에 정의된 힐베르트 해 공간 $H^1(\Omega_G)$ 의 일반유한요소 형상함수를 이용한 이산화(discretization)이다. 식 (7)의 변수 η 는 벌칙계수(penalty parameter)이다. 식 (7)에 의해 정의된 문제를 풀기 위해 일반적으로 성긴 유한요소망을 사용하며 선형 탄성 재료 모델을 이용한다. 이 문제는 그림 1(a)에 나타난 단계에 해당하며 편의상 선형 초기 전체 문제(linear initial global problem)라 명명한다.

3.2. 비선형 국부 문제

Ω_L 을 국부적으로 비선형 거동을 보이는 영역을 포함하는 Ω_G 의 하부영역(subdomain)으로 정의하고 다음의 국부 문제를 최종 유사 시간 스텝 $t^{n_{\max}}$ 에 대해 비선형 재료모델을 가정하고 구한다:

$$\forall v_L^{n_{\max}} \in X_L^{n_{\max}}(\Omega_L) \text{에 대해 } u_L^{n_{\max}} \in X_L^{n_{\max}}(\Omega_L) \subset H^1(\Omega_L) \text{을 만족시키는 다음 적분식의 해 } u_L^{n_{\max}} \text{를 구하라.}$$

$$\int_{\Omega_G} \sigma(u_L^{n_{\max}}) : \epsilon(v_L^{n_{\max}}) dx + \eta \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G} u_L^{n_{\max}} \cdot v_L^{n_{\max}} ds + \kappa \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} u_L^{n_{\max}} \cdot v_L^{n_{\max}} ds =$$

$$\int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G} \bar{t}^{n_{\max}} \cdot v_L^{n_{\max}} ds + \eta \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G} \bar{u}^{n_{\max}} \cdot v_L^{n_{\max}} ds + \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} (t(u_G^{n_{\max}}) + \kappa u_G^{n_{\max}}) \cdot v_L^{n_{\max}} ds, \quad (8)$$

$X_L^{n_{\max}}(\Omega_L)$ 는 Ω_L 에 정의된 힐베르트 해 공간 $H^1(\Omega_L)$ 의 일반유한요소 형상함수를 이용한 이산화(discretization)이다. 이 문제의 핵심적인 사항은 선형 초기 전체 문제의 해 $u_{G,lin}^{n_{\max}}$ 를 $\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)$ 에서의 경계조건으로 이용하고 이 문제의 해 $u_L^{n_{\max}}$ 는 영역 Ω_L 에서의 비선형거동을 정확하게 묘사할 수 있다는 것이다. 이 문제는 그림 1(b)에 묘사되어 있다. 변수 η 는 벌칙계수(penalty parameter)이며 스프링 강성 κ 는 국부

적인 비선형 거동이 Ω_L 의 내부에 완전히 구속될 경우 (Kim et al. 2010)에 소개된 것처럼 선형 탄성적인 경우와 마찬가지로 선택될 수 있다. 이 문제는 편의상 비선형 국부 문제(nonlinear local problem)라 명명한다.

3.3. 비선형 전체 문제를 위한 전체-국부 확장함수

3.1장과 3.2장에 묘사된 선형 초기 전체 문제와 비선형 국부 문제는 비선형 전체 문제에 비선형 전체-국부 확장함수 $u_L^{n_{\max}}$ 를 공급하기 위한 과정이다. 이 과정들 이후 각각의 유사 시간 스텝에 대해 비선형 전체 문제의 해를 구하기 위한 비선형 반복(nonlinear iteration)이 수행된다. 그림 1(c)에 표현된 것과 같이 $u_L^{n_{\max}}$ 에 의해 확장된 비선형 전체 문제를 u_G^n 를 구하기 위해 푼다. 임의의 유사 시간 스텝 t^n 에 대한 전체-국부 일반요소 형상 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_\alpha^n(x) = \varphi_\alpha(x) u_L^{n_{\max}}(x). \quad (9)$$

임의의 유사 시간 스텝 t^n 에 대해 $u_L^{n_{\max}}$ 에 의해 확장된 비선형 전체 문제의 약식(weak formulation)은 다음과 같이 주어진다:

$$\forall v_G^n \in X_G^n(\Omega_G) \text{에 대해 } u_G^n \in X_G^n(\Omega_G) \subset H^1(\Omega_G) \text{을 만족시키는 다음 적분식의 해 } u_G^n \text{를 구하라.}$$

$$\int_{\Omega_G} \sigma(u_G^n) : \epsilon(v_G^n) dx + \eta \int_{\partial\Omega_G} u_G^n \cdot v_G^n ds = \int_{\partial\Omega_G} \bar{t}^n \cdot v_G^n ds + \eta \int_{\partial\Omega_G} \bar{u}^n \cdot v_G^n ds, \quad (10)$$

$X_G^n(\Omega_G)$ 는 $X_{G,lin}^{n_{\max}}(\Omega_G)$ 에 식 (9)으로 정의된 일반요소 형상 함수가 추가된 Ω_G 에 정의된 힐베르트 해 공간 $H^1(\Omega_L)$ 의 이산화(discretization)이다. 이 문제는 비선형 확장 전체 문제(nonlinear enriched global problem)이라 명명된다. 비선형 전체-국부 확장함수는 3차원 탄소성 문제를 해석할 경우 국부 문제의 자유도의 개수와 상관없이 성긴 전체 문제의 요소망에 절점 당 오직 3개의 자유도만을 추가한다. 따라서 전체 문제의 크기를 크게 증가시키지 않으면서도 주어진 탄소성 문제의 미소 스케일 거동을 묘사하기 위해 국부 문제에 세분화된 요소망을 사용하거나 높은 차수의 형상 함수를 사용하는 것이 가능하다.

4. 수치 해석 예제

본 장에서는 제안된 전체-국부 확장함수를 지닌 일반요소법의 효율성을 검증하기 위해 그림 2에 나타난 두 물질의 경계면을 가지는 막대 문제를 해석한다. 이 문제의 영역은 $12 \times (7 \times 1 \times 1)$ 개의 사면체 요소로 이산화되며 그림에 표현된 것처럼 가운데의 한 층(layer)만이 다른 층보다 작은 항복 응력값(yield stress)을 가지게 된다. 따라서 하중이 증가함에 따라 가운데 층에서만 소성변형이 발생하여 전체 영역의 일부분에만 소성 변형이 구속되게 된다. 그림에 나타난 막대의 기하학적 치수는 $h = 7.0, a = 1.0, b = 1.0, m = 1.0$ 으로 주어지며 막대의 꼭대기와 바닥 부분에 일정한 전인력 $t_y = 7.0$ 이 작용한다. 선형 등방 경화 모델의 물성치는 다음과 같이 주어진다: 탄성계수(E) = 4.0, 포아송 비(ν) = 0.0, 항복 응력(σ_y) = 4.0, 선형 경화 계수(h) = 1.0 (가운데 층); 탄성계수(E) = 4.0, 포아송 비(ν) = 0.0, 항복 응력(σ_y) = 12.0, 선형 경화 계수(h) = 1.0 (바깥 층). 뉴턴 수렴을 위한 오차 허용치는 10^{-4} 로 주어지며 14단계의 동일한 유사 시간 스텝이 점진적인 해석(incremental analysis)를 위해 사용된다. 따라서 각각의 유사 시간 단계에서의 하중 증가분은 0.5가 된다. 해의 정확성에 대한 척도로 막대의 꼭대기 부분의 중앙에서 측정된 변위를 이용하며 이는 y 방향의 최대 변위와 같다. 그림 3은 주어진 문제를 다항식을 확장함수로 이용하는 일반요소법(hp -GFEM)과 전체-국부 확장함수를 지닌 일반요소법(GFEM^{g-1})을 이용한 해를 비교한 그래프이다. 두 경우의 해를 얻기 위해 소성 변형률이 존재하는 가운데 층에 동일한 레벨의 요소 세분화(mesh refinement)가 수행되었으며 2차의 형상함수가 사용

되었다. 참고해(reference solution)는 3차의 형상함수와 막대의 전체 영역에 요소 세분화를 이용하여 hp -GFEM으로 구한 값이다. 세 가지 해 모두 거의 동일한 정확도를 보이고 있어 제안된 $GFEM^{p-1}$ 이 전체 문제에 적은 수의 자유도를 이용함에도 불구하고 높은 정확도의 해를 구할 수 있음을 알 수 있다.

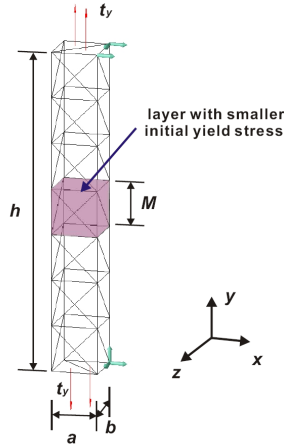


그림 2. 두 물질의 경계면을 가지는 막대.

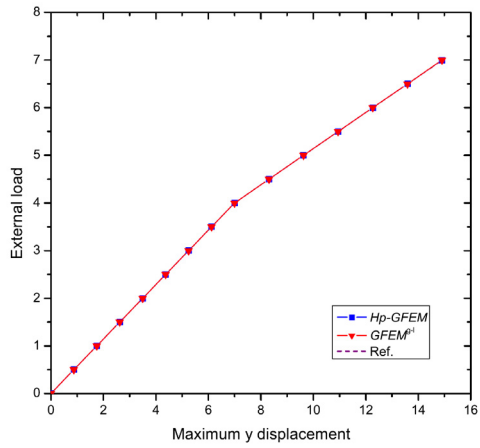


그림 3. hp -GFEM과 $GFEM^{p-1}$ 에 의해 계산된 비선형 하중-변위 곡선의 비교.

5. 결론

본 논문에서는 탄소성 해석을 위한 전체-국부 확장함수를 지닌 일반유한요소법을 제안하였다. 제안된 기법은 전체 문제에 적은 자유도를 이용하면서도 국부적으로 비선형 거동을 보이는 문제의 정확한 해를 구하는 데 이용될 수 있다. 추후 제안된 기법을 활용한 다양한 수치 예제 해석을 통해 이의 우수성을 보일 예정이다.

감사의 글

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2010-0024387).

참고문헌

- Kim, D.-J., Pereira, J.P. and Duarte, C.A. (2010) Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse generalized FEM meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(3) pp.335 - 365.
- Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. (1998) *Computational Inelasticity*. Springer.
- Simo, J.C. and Taylor, R.L. (1985) Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(1), pp.101~118.