

뒤틀림 변위를 고려한 일반 빔 유한요소의 개발

Developing General Beam Finite Elements with Warping Displacement

윤 경 호* • 이 필 승**

Yoon, Kyungho • Lee, Phill-Seung

요 약

본 논문에서는 유한요소법을 이용하여 임의의 단면을 가지는 빔의 비틀림 문제를 해석 할 수 있는 방법을 제시하였다. 빔 유한요소에서 연속적인 뒤틀림함수를 얻기 위해 각 절점에서 뒤틀림자유도를 정의한 후 빔의 길이 방향으로 보간하였다. 이러한 방법의 사용은 뒤틀림구속효과와 비선형문제에 쉽게 접근 할 수 있게 한다. 또한, 임의의 단면에 대한 뒤틀림함수는 각 단면에서 St.Venant 방정식을 유한요소법을 통해 수치적으로 계산된다. 단면에서 계산된 해는 3차원 일반 빔 요소의 변위장에 매핑된다. 위와 같은 절차를 통해 개발된 빔 유한요소를 사용하면 임의의 단면을 가진 빔 구조물을 자유/구속 뒤틀림조건에서 비틀림, 굽힘, 신축 변형이 복합적으로 고려하여 해석해 낼 수 있다. 이렇게 해석된 결과를 검증하기 위하여 사각단면과 L단면에서의 결과 값을 고찰하였다.

keywords : FEM, St.Venant, Beam, Torsion, Warping

1. 서론

많은 공학적 구조물의 거동을 수치적으로 해석하기 위해 빔 유한요소는 널리 이용되고 있다. 하지만 아직까지 비틀림 문제에 대해 제한적인 해석이 이루어지고 있다. 이에 따라서 비틀림 문제의 해결을 위해 뒤틀림 효과(warping effect)를 고려한 빔 유한요소에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다. 특히 한쪽 단면의 뒤틀림 변위가 구속된 경우, 단면의 뒤틀림을 제한하기 위해 고정된 끝단에 축 방향 분포수직응력이 발생하고, 이에 따라 분포전단응력(St.Venant's shear)과 Bi-moment가 생성되는 현상이 발생한다. 이에 따라서 자유뒤틀림 조건의 경우보다 복잡한 지배방정식을 가지며, 또한 단면이 변하거나, 곡률을 갖는 구조적 형상에 적용하기 힘들다.

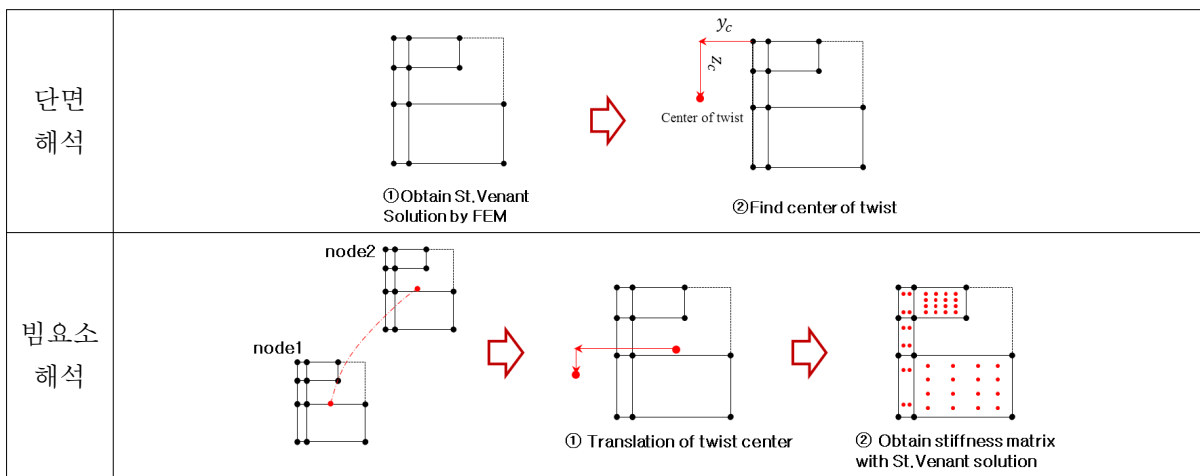
빔의 비틀림 문제에 대한 수학적 해석 해는 Timoshenko(1945)에 의해 자유뒤틀림조건(양 끝단 모두 뒤틀림변위가 자유로운 경우)에서 St.Venant 비틀림 문제의 해가 구해졌다. 그 이후 Vlasov(1961)가 박판단면 빔에 대해 이론을 정립하고, 고정뒤틀림조건(한 끝단 뒤틀림변위가 구속된 경우)에서의 비틀림 문제의 해를 제시했다. 이어서 Reissner(1979, 1983, 1992)가 균일단면 빔에서 비틀림을 포함한 복합하중을 고려할 수 있는 방법을 개발하였다. 현재까지 빔 유한요소 해석에서 비틀림 문제를 해결하기 위해 뒤틀림자유도를 추가하고 해석적으로 구해진 뒤틀림함수를 각 절점에서 보간하여 연속적인 뒤틀림함수를 얻는 방법이 가장 널리 쓰이고 있다. 이 방법에서 뒤틀림함수를 결정하는데 박판단면 빔의 경우 Vlasov(1961)가 세운 이론에 따라

* 학생회원 • 한국과학기술원 해양시스템공학전공 석사과정 close2u@kaist.ac.kr

** 정회원 • 한국과학기술원 해양시스템공학전공 부교수 phillseung@kaist.edu

contour뒤틀림과 thickness뒤틀림함수를 수학적으로 구하여 쓰며, 사각단면 빔의 경우 Bathe(1982)가 뒤틀림함수의 해석해를 적용하였다. 하지만 이러한 해석해들은 단면의 형상에 대해 제약적이기 때문에, 위에 언급한 경우를 제외한 단면의 경우에서 쓸 수 없다는 한계점을 가진다. 본 논문의 목적은 좀 더 일반적인 구조물 해석을 위해 임의의 단면을 갖는 빔 유한요소의 개발이다. 주어진 단면의 St.Venant 해를 유한요소법을 이용해 수치적으로 구해내고, 앞서 계산된 해를 빔 요소의 변위장에 매핑시켜 추가 뒤틀림자유도로 보간해 빔의 강성행렬을 구해내어 복잡한 변위를 구해 낼 수 있는 방법을 제시하였다. 전체 절차를 요약해보면 표 1과 같다.

표 1 Procedure Overview



2. 강성행렬의 계산

표 1의 그림과 같이 단면을 최소한으로 덮을 수 있는 사각형의 참고단면을 정의하여, 이 단면에 대한 새로운 자연좌표계를 잡아 계산한다. 다음과 같은 비틀림 중심으로 이동된 빔의 변위 formulation을 적용한다. 각 절점에 뒤틀림자유도가 정의되었으므로 연속적인 뒤틀림함수를 얻어낼 수 있게 된다. 이러한 연속성에 의해 고정와핑조건에서 더 정확한 값을 얻어 낼 수 있다.

$$u_w = \sum \psi h_i \alpha_i, \quad \alpha_i : \text{뒤틀림자유도}, \quad h_i : \text{보간함수}, \quad \vec{V}_{si} : s\text{-방향벡터}, \quad \vec{V}_{ti} : t\text{-방향벡터}$$

$$a_k : \text{참고단면의 세로길이}, \quad b_k : \text{참고단면의 가로길이}, \quad s_c, t_c : \text{자연좌표계에서 비틀림 중심의 } s, t\text{좌표}$$

$$\vec{u} = \sum h_i u_i + \sum \frac{t-t_c}{2} a_i h_i (\vec{\theta}_i \times \vec{V}_{ti}) + \sum \frac{s-s_c}{2} b_i h_i (\vec{\theta}_i \times \vec{V}_{si}) + u_w \vec{V}_{ri} \quad (1)$$

이 변위장을 미분하여 변형률 행렬을 얻을 수 있으며 앞서 정의된 사각 참고단면에 매핑된 빔의 각각의 부피에 대해 가우스 수치적분을 하여 그 합으로 강성행렬을 구해낸다. 이 때 각 부피의 가우스 적분점에서의 대응되는 뒤틀림함수 값들을 불러와 사용하게 된다. 이 때 뒤틀림함수와 비틀림중심의 수치해는 미리 단면해석에서 이루어지며, 직교좌표계에서의 값들로 불러온 값들은 이후 사각참고단면의 새로운 자연좌표계에 매핑하여 사용한다.

3. 뒤틀림함수의 수치해

표 1에서의 단면 해석 절차에 해당된다. 이 장에서는 단면의 지배방정식인 St.Venant 방정식의 변분식을 유도하고, 얻어진 식을 유한요소법을 이용해 수치적으로 풀어냄으로 각각의 단면의 뒤틀림함수를 구해낸다. 또한 이 결과 값을 이용하여 비틀림 중심을 구해내어, 빔의 변위 formulation의 중점을 옮겨 준다. 단면의 비틀림 변형에 대한 kinematics와 equilibrium에 의해 유도된 지배 방정식인 St.Venant 방정식은 다음과 같다.

ψ : 비틀림함수, $\vec{n} = (m, n)$: 단면의 표면에 수직인 벡터

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{with B.C.} \quad \vec{n} \cdot \nabla \psi = mz - ny \quad (2)$$

위의 St.Venant 방정식은 다음과 같이 변분식으로 유도되어 진다.

$$\int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \delta \psi}{\partial z} \right) dV = \int_S (mz + ny) \delta \psi dS \quad (3)$$

위의 변분식을 유한요소법에 적용하여 뒤틀림함수의 수치해를 구해낸다. 연산을 최적화 하기위해 단면의 형태에 따라 사용할 유한요소의 종류와, 요소의 개수, 그리고 보간 차수를 고려해주어 단면에 유한요소를 생성해주고 그에 맞는 단면 정보를 입력한다. 이 정보에 따라 원점을 결정하고 직교좌표계를 세우고, 각 요소를 자연좌표계로 이동시켜 계산해주었다. 이렇게 구해진 뒤틀림함수의 수치값을 이용하여 비틀림 중심을 구해낸다. 원점으로부터의 그 좌표 y_c, z_c 는 다음과 같다. 이 값은 식 (1)에서 사각참고단면의 새로운 자연좌표계에 s_c, t_c 로 매핑하여 사용한다

$$A_{\bar{\psi}\bar{\psi}} = \int \bar{\psi}^2 dA, \quad \bar{\psi} = \psi - \frac{1}{A} \int \psi dA, \quad \psi: \text{원점에서의 뒤틀림함수}, \quad \bar{\psi}: \text{무게중심에서의 뒤틀림함수}$$

$$y_c = -\frac{A_{\bar{\psi}z} A_{\bar{\psi}y} - A_{\bar{\psi}y} A_{\bar{\psi}z}}{A_{\bar{\psi}y} A_{\bar{\psi}z} - A_{\bar{\psi}y}^2}, \quad z_c = \frac{A_{\bar{\psi}y} A_{\bar{\psi}z} - A_{\bar{\psi}z} A_{\bar{\psi}y}}{A_{\bar{\psi}y} A_{\bar{\psi}z} - A_{\bar{\psi}y}^2} \quad (4)$$

4. 수치해석 결과

4.1. 균일 사각단면 빔 요소의 자유/고정뒤틀림 해석

단 하나의 빔 요소를 사용하여 a/b 비율을 바꾸어 가며, 해석해와 Bathe가 제안한 뒤틀림함수(2개의 추가 자유도)를 사용한 경우와 본 논문에서의 방법(1개의 추가 자유도)의 각각 자유단에서의 θ_x 값을 비교해 보았다. 수치해석조건은 그림 1과 같다. 표 2의 수치해석 결과를 보면 이전의 방법보다 적은 자유도를 이용해 해석해에 더 근접했음을 볼 수 있다.

표 2 수치해석 결과 (θ_x)

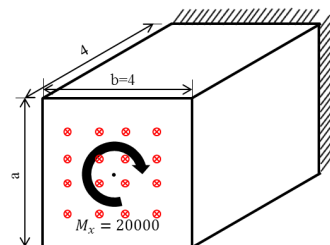


그림 1 사각단면 캔틸레버의 비틀림 문제

a/b	Analytical Solution	Bathe's Study		Present Study	
	Free	Free	Constraint	Free	Constraint
1	2.881E-8	2.887E-8	2.858E-8	2.887E-8	2.790E-8
2	8.870E-9	8.809E-9	6.833E-9	8.850E-9	6.832E-9
3	5.149E-9	5.046E-9	2.657E-9	5.093E-9	2.680E-9
6	2.645E-9	2.192E-9	4.294E-10	2.212E-9	4.326E-10
20	-	6.144E-10	1.296E-11	6.153E-10	1.297E-11

4.2. 균일 L단면 빔요소의 자유/고정뒤틀림 해석

그림 2의 빔 조건에서 자유뒤틀림조건과 고정뒤틀림조건에서 각각 해석해 보았다. 표 3의 경우 자유뒤틀림 조건에서 두께를 변화시키면서 자유단에서의 θ_x 값을 비교해 보았다. 표 4의 경우 고정뒤틀림조건에서 빔의 요소 수 N을 늘려가며 θ_x 값을 비교해 보았다. 자유뒤틀림조건에서 단면의 두께가 증가하면서 차이가 점점 커지는 것을 볼 수 있다. 이것은 해석해의 모델링에 두께가 매우 얇다는 가정에서 생겨나는 차이이며, 이번 연구결과 그 가정에서 오는 차이를 보정해주고 있음을 볼 수 있다. 고정뒤틀림조건에서 쓰인 참고 값인 셸 모델 역시 마찬가지로의 이유로 차이가 있음을 볼 수 있다.

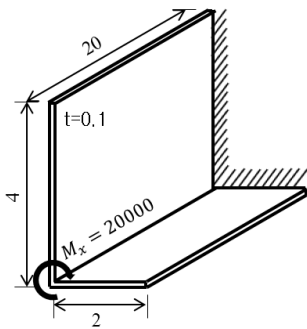


그림 2 L단면 캔틸레버의 비틀림 문제

표 3 자유뒤틀림조건(θ_x)

t	Analytical Sol.	Present Study
0.005	1.04E-3	1.04E-3
0.01	1.30E-4	1.30E-4
0.05	1.0E-6	1.05E-6
0.1	1.3E-7	1.32E-7
0.5	-	1.17E-9
1	-	1.70E-10

표 4 고정뒤틀림조건(θ_x)

N	Present Study
1	1.29E-7
2	1.23E-7
4	1.21E-7
10	1.21E-7
20	1.21E-7
Shell sol.	1.19E-7

4. 결론

본 연구에서는 수치적으로 유도한 뒤틀림함수를 사용함으로써, 기존의 뒤틀림함수의 해석해보다 정확한 결과 값을 얻어 낼 수 있었다. 또한 곡률을 가지거나, 단면이 변하는 조건하에서 사각단면이나, 박판단면에 한정되어 있던 빔 요소의 해석을 임의의 단면에 대해 복합하중을 고려한 해석을 수행 할 수 있는 방법론을 제시하였다. 이러한 뒤틀림자유도를 추가하는 방법은 다른 방법들보다 쉽게 빔의 비선형해석에 접근할 수 있는 장점을 가진다. 앞으로 복잡한 형상에 대한 해석의 참고값을 찾아 정확성을 검증하고, Wagner 효과를 고려한 비선형 해석이 가능한 빔 유한요소 개발을 할 것이다.

참고문헌

- Bathe K.J.** (1982) On the displacement formulation of torsion of shafts with rectangular cross-section, *International journal for numerical methods in engineering*, (18), pp.1565-1568
- Bathe K.J.** (1996) Finite element procedures, *Prentice Hall*, New York
- Boresi** (2002) *Advanced Mechanics of Materials*, *Wiley*
- Gruttmann F.** (1999) Shear stresses in prismatic beams with arbitrary cross-section, *International journal for numerical methods in engineering*, (45), pp.865-889
- Lee P.S.** (2006) A general 3D L-section beam finite elements for elastoplastic large deformation analysis, *Computer & Structures*, (84), pp.215-229
- Timoshenko S.P.** (1970) *Theory of elasticity*, *McGraw Hill*
- Vlasov V.Z.** (1961) *Thin-walled elastic beams*, *UMI*