

Hellinger-Reissner 범함수를 이용한 효율적인 3절점 판 유한요소의 개발

Development of an efficient 3-node plate bending element by using the Hellinger-Reissner functional

이 윤 규* · 최 창 근** · 이 필 승***

Lee, Youn Gyu · Choi, Chang-Koon · Lee, Phill-Seung

요 약

본 논문의 목적은 효율적인 3절점 판 유한요소를 개발하는 것이다. Hellinger-Reissner 범함수에 근거한 혼합정식화(mixed formulation)를 사용한다. 잠김현상을 일으키는 전단변형률장을 독립적으로 분리한 후, MITC(Mixed Interpolation of Tensorial Components)방법을 이용하여 대체전단변형률장(assumed transverse shear strain field)을 구성한다. 추가적으로 회전된 반변기저벡터(contravariant base vector)로 정의된 근사전단변형률장(approximated transverse shear strain field)에 미지수(unknowns)를 도입하여 혼합정식화를 완성시키고 정적응축(static condensation)을 통해 최종 강성행렬을 구성한다. 거짓영에너지모드 시험(spurious zero energy mode test), 조각시험(patch test), 등방성시험(isotropic test) 등을 실시하였으며, 4변 완전구속 정사각형 판 구조물과 60도 기울어진 단순지지 판 구조물 등 예제들을 해석하여 MITC3 판 유한요소와 수렴성능을 비교하였다.

keywords : Hellinger-Reissner 범함수, MITC method, 전단변형률장

1. 서 론

판 구조물의 해석에 있어서 변위법에 입각한 판 유한요소는 두께가 얇아질수록 변위 보간함수의 차수에 상관없이 전단잠김현상(shear locking phenomenon)을 유발한다. 전단잠김현상을 줄이는데 효과적인 MITC(Mixed Interpolation of Tensorial Components)방법으로 MITC 판 유한요소들이 개발되었다. 이중에 3절점을 이용하는 MITC3 판 유한요소는 변위법에 입각한 3절점 판 유한요소보다 우수한 해의 수렴성을 보이나 사각형 MITC 유형의 판 유한요소보다 성능이 떨어진다(Lee와 Bathe, 2004; Lee 등, 2007). 본 논문의 목적은 HR(Hellinger-Reissner) 범함수에 입각한 효율적인 3절점 판 유한요소를 개발하는 것이다. 이상적인 판 유한요소의 조건은 다음과 같다. 첫째, 타원율(ellipticity) 조건으로 판 유한요소는 거짓영에너지모드(spurious zero energy mode)를 갖지 말아야 한다. 즉, 판 유한요소는 변위경계조건이 없을 때 3개의 영에너지모드(zero energy mode)를 가져야 한다. 둘째, 무모순성(consistency)으로 유한요소의 크기(h)가 작아짐에 따라 판 유한요소

* 학생회원 · 한국과학기술원 해양시스템공학전공 박사과정 pointer1234@kaist.ac.kr

** 정회원 · 한국과학기술원 건설 및 환경공학과 석좌교수 cck@kaist.ac.kr

*** 정회원 · 한국과학기술원 해양시스템공학전공 부교수 phillseung@kaist.edu

수학적 모델의 해에 수렴해야 한다. 셋째, 판 유한요소는 두께변화에 상관없이 균일최적수렴(uniform optimal convergence)을 해야 한다(Chapelle 와 Bathe, 2003). 이상적인 판 유한요소를 개발하는 것은 어려운 일이며 실용적인 판 유한요소해석에서 쓰일 수 있는 조건은 다음과 같다. 거짓영에너지모드(spurious zero energy mode)가 없으며, 무모순성(consistency)을 만족하고 판 문제의 해석 시 실용적인 t/L의 범위(1/10~1/10000)에서 전단잠김현상이 적어야 한다.

2. HR범함수를 이용한 3절점 판 유한요소의 정식화

HR범함수는 판 유한요소에서 전단잠김현상(shear locking phenomenon)을 일으키는 전단변형률장(transverse shear strain field)을 독립적으로 분리할 수 있게 해주며, 최종 강성행렬은 정적응축(static condensation)으로 다음과 같이 구해진다(Bathe, 1996).

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\epsilon} \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon}^{-1} \mathbf{K}_{u\epsilon}^T \quad (1)$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b \text{Det}(\mathbf{J}) dA; \quad \mathbf{K}_{u\epsilon} = \int_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s^A \text{Det}(\mathbf{J}) dA; \quad \mathbf{K}_{\epsilon\epsilon} = - \int_A \mathbf{B}_s^A \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s^A \text{Det}(\mathbf{J}) dA \quad (2)$$

\mathbf{B}_b 은 단면곡률-변위 행렬이고 변위법 기반으로 유도되며, \mathbf{B}_s 는 대체전단변형률(assumed transverse shear strain)-변위 행렬로 MITC 방법을 이용하여 구한다. 관계식은 다음과 같다.

$$\tilde{e}_{rt} = e_{rt}^{(1)} + cs; \quad \tilde{e}_{st} = e_{st}^{(2)} - cr; \quad c = e_{st}^{(2)} - e_{rt}^{(1)} - e_{st}^{(3)} + e_{rt}^{(3)} \quad (3)$$

$e_{rt}^{(1)}, e_{rt}^{(3)}, e_{st}^{(2)}, e_{st}^{(3)}$ 는 그림 1(a)에서와 같이 삼각형 각 변의 중심 지점(tying points)에서 구한 공변(covariant)변형률이다(Lee와 Bathe, 2004). \mathbf{B}_s^A 는 근사전단변형률(approximated transverse shear strain)-변위 행렬로 그림 1(b)와 같이 θ 회전된 공변(covariant)기저벡터로부터 유도된 반변(contravariant)기저벡터에서 다음과 같이 정의 된다.

$$\mathbf{B}_s^A \tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_{rt} \\ \tilde{e}_{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \tilde{\alpha}_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$ 은 근사전단변형률장(approximated transverse shear strain field)을 구성하기 위한 미지수(unknowns)이다.

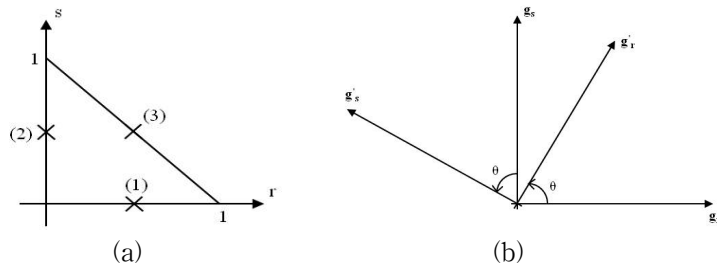


그림 1. (a) 3절점 판 유한요소의 전단변형률장을 형성하기 위한 공변(covariant)변형률을 구하는 지점(tying points); (b) θ 회전된 공변기저벡터($\mathbf{g}'_r, \mathbf{g}'_s$)와 회전 전 공변기저벡터($\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_s$).

3. 수치해석 결과

개발된 HR3M 판 유한요소($\theta=89^\circ$)는 기본적 시험인 거짓영에너지모드시험(spurious zero energy mode test), 조각시험(patch test), 등방성시험(isotropic test)을 모두 통과 하였으며(Bathe, 1996), 수렴성평가를 4변 완전구속 정사각형 판 구조물과 60도 기울어진 단순지지 판 구조물 예제를 통하여 수행하였다. 수렴성평가는 다음의 관계식을 이용하여 수행하였다.

$$\text{상대오차(relative error)} = \frac{E_{ref} - E_h}{E_{ref}} \quad (6)$$

기준이 되는 변형에너지인 E_{ref} 는 128×128 요소망을 이용한 MITC4 판 유한요소로부터 구한 값이며, E_h 는 요소망의 크기(h)를 변화시키면서 구한 변형에너지이다.

3.1. 4변 완전 구속된 정사각형 판 구조물

그림 2(a)의 판 구조물은 4변이 완전 구속이 되었으며, 치수가 $2L \times 2L$ 이고 판 구조물의 평면에 수직인 방향으로 균일하게 압력이 가해지는 경우이다. 판 구조물의 대칭성으로 인하여 1/4모델만 고려하였으며, 경계 조건은 \overline{BC} 에서는 $\theta_y = 0$ 이며, \overline{DC} 에서는 $\theta_x = 0$ 이고, \overline{AB} 와 \overline{AD} 에서는 $w = \theta_x = \theta_y = 0$ 이다(Lee 와 Bathe, 2004; Lee 등, 2007). 삼각형 요소망-a(그림 2(c))를 이용한 경우에 HR3M 판 유한요소가 두께 대 길이 비(t/L)가 1/1000, 1/10000일 때 MITC3 판 유한요소보다 성능이 개선된 것을 그림 3(a)에서 확인할 수 있다. 삼각형 요소망-b(그림 2(d))를 이용한 경우는 HR3M 판 유한요소와 MITC3 판 유한요소가 모두 거의 균일최적수렴(uniform optimal convergence)을 하는 것을 그림 3(b)에서 확인할 수 있다.

3.2. 60도 기울어진 단순지지 판 구조물

그림 2(b)의 판 구조물은 60도 기울어져 있으며, 판 구조물의 평면에 수직인 방향으로 균일하게 압력이 가해지는 경우이다. 경계조건은 모든 모서리에서 $w=0$ 이다. 삼각형 요소망-c(그림 2(e))를 이용한 경우에 HR3M 판 유한요소가 두께 대 길이 비(t/L)가 1/1000, 1/10000일 때 MITC3 판 유한요소보다 성능이 개선된 것을 그림 3(c)에서 확인할 수 있다.

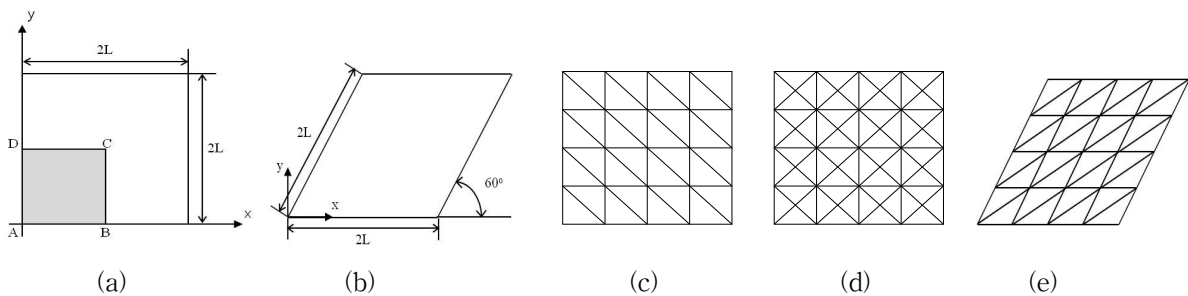


그림 2. $L=1.0$, $E=1.7472 \times 10^7$, $\nu=0.3$, $q=90$. (a) 4변 완전 구속된 정사각형 판 구조물; (b) 60도 기울어진 단순지지 판 구조물; (c) 삼각형 요소망-a; (d) 삼각형 요소망-b; (e) 삼각형 요소망-c.

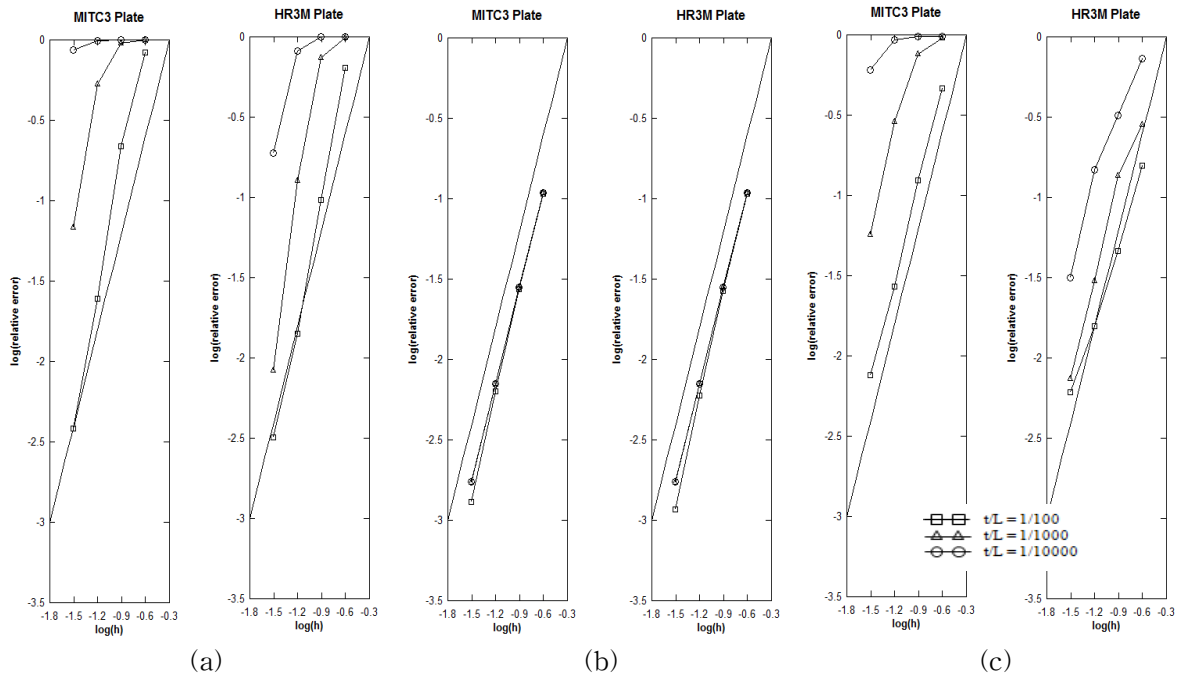


그림 3. 수렴곡선. (a), (b)는 4변 완전 구속된 정사각형 판 구조물(그림 2(a)) 문제이고, (c)는 60도 기울어진 단순지지 판 구조물(그림 2(b)) 문제임. 이론적 수렴 기울기는 2.0 임. (a) 삼각형 요소망-a(그림 2(c)); (b) 삼각형 요소망-b(그림 2(d)); (c) 삼각형 요소망-c(그림 2(e)).

4. 결론

본 논문의 목적은 HR 범함수에 근거한 혼합정식화로(mixed formulation) 효율적인 3절점 판 유한요소를 개발하는 것이다. HR3M 판 유한요소는 4변이 완전 구속된 정사각형 판 구조물 문제와 60도 기울어진 단순지지 판 구조물 문제에서 두께 변화($t/L=1/100 \sim 1/10000$)에 따른 수렴성능평가에서 MITC3 판 유한요소보다 개선된 성능을 나타내고 있다. 따라서 HR3M 판 유한요소는 3절점 삼각형 요소망을 이용한 공학적 판 구조물 해석에 좀 더 정확한 해를 줄 것이다.

참고문헌

- Bathe KJ (1996) Finite element procedures, *Prentice Hall*, New York.
- Chapelle D, Bathe KJ (2003) The finite element analysis of shells-fundamentals, *Springer-Verlag*, Berlin
- Lee PS, Bathe KJ (2004) Development of MITC isotropic triangular shell finite elements, *Computers & Structures*, 82, pp.945-962.
- Lee PS, Noh HC, Bathe KJ (2007) Insight into 3-node triangular shell finite elements: the effects of element isotropy and mesh patterns, *Computers & Structures*, 85, pp.404-418.