SPH 입자의 경계조건 분석 및 해석

Review and Analysis of Boundary Conditions for SPH Particles

이 민 아* • 탁 문 호** • 박 대 효***
Lee, Min-A • Tak, Moon-Ho • Park, Tae-Hyo

요 약

일반적으로 컴퓨터를 이용한 수치 해석에는 격자 수치 해석 방법인 유한요소법 또는 유한차분법이 주로 사용되어 왔다. 그러나 이러한 방법들은 해석하고자 하는 영역을 요소나 격자 등으로 분할해야 하기 때문에 복잡한 현상들을 다루는 데 어려움을 갖게 된다. 이를 극복하기 위해 개발된 방법이 무요소법(Meshfree Method)이며 본 논문에서는 다양한 무요소법들 중 SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)가 고려되어진다. SPH는 라그랑지안 수치 근사 기법을 사용하는 입자법(Particle Method)으로 SPH를 정확하게 실행하기 위해서는 적절한 경계 처리법이 요구된다. 그러나 기존의 경계 처리법은 유체 입자의 침투현상 및 커널(Kernel) 끊김 현상이 발생하기 때문에 적합하지 않다. 따라서 지금까지 SPH의 경계 처리법을 향상시키기 위해 다양한 접근법들이 제안되었으며 본 논문에서는 이러한 접근법들 중 정반사(Specular Reflection), 재회복(Bounce-back), 재도입(Reintroduce) 방법 및 경계 반발력(Repulsive Force)과 가상 입자(Ghost Particle)의 적용이 분석되고 현상 접목을 통해 적절한 경계 처리법이 제안되어진다.

keywords : 무요소법, 입자법, Smoothed Particle Hydrodynamics, 경계 처리법

1. 서 론

SPH는 물리적인 문제들을 모델링하기 위해 사용되는 적응적 무요소 방법으로 라그랑지안 수치 근사 기법이 사용된다. SPH는 유한요소법이나 유한차분법과 같은 오일러리안 전산 기법(Eulerian Computational Technique)과 달리 커널 함수(Kernel Function)를 이용하여 유도되기 때문에 격자가 요구되지 않는다. SPH는 원래 천체 물리학 분야에서 유체를 동적으로 해석하기 위해 Lucy(1977) 및 Gingold와 Monaghan(1977)에 의해 처음으로 제안되었고 점차적으로 유체와 고체역학의 다양한 유형을 다루기 위해 일반화되었다. SPH는 응결, 결정성장(Crystal Growth) 및 자유 수면 흐름과 같은 어려운 물리적 현상들을 단순하게 해석할 뿐만 아니라 복잡한 재료의 표면 거동 모델링을 비교적 쉽게 할 수 있다는 장점을 가진다. SPH의 도메인에 있는 각각의 입자들은 하나의 분리된 물리적 물체로 연상될 수 있으며 입자들은 연속체의 거시적 부분을 의미한다. 이 때 연속체는 각 입자의 질량, 가속도 및 다른 유체역학의 특성 전체를 통해 표현된다.

일반적으로 공학 문제에서의 도메인은 경계를 가지게 된다. 여기서 물리적인 의미의 경계는 강체의 내부 및 외부에 유체가 전체 또는 부분적으로 위치해 있을 때 강체 표면을 의미하며 비유동적이거나 유동적일 수 있다. 기존의 SPH 공식들은 모두 내부 입자에서 유효하다. 그러나 도메인 경계에 인접한 입자들의 경우에는

* 학생회원 • 한양대학교 건설환경공학과 석사과정 myth413@hanyang.ac.kr
** 정회원 • 한양대학교 건설환경공학과 박사 후 연구원 pivotman@hanyang.ac.kr
*** 정회원 • 한양대학교 건설환경공학과 교수 cepark@hanyang.ac.kr

커널이 경계에 의해 불완전해지기 때문에 더 이상 경계 조건이 적용되지 못한다. 기존의 경계 처리법이 적합하지 않은 것은 크게 두 가지 이유를 들 수 있다. 첫 번째는 경계면 안에 위치한 유체 입자들이 경계를 침투하여 도메인을 벗어나기 때문이고 두 번째는 경계면에서 커널이 끊기는 현상이 발생하기 때문이다. 이러한 문제들을 해결하기 위해 지금까지 다양한 접근법들이 제안되었다. 본 논문에서는 다양한 접근법들 중 몇 가지가 간략하게 분석되고 기존의 경계 처리법을 개선시키는 방법이 제안된다.

2. Smoothed Particle Hydrodynamics의 공식화

SPH 공식은 커널 근사법(Kernel Approximation) 또는 커널 함수에 기초를 둔다. 이 때 커널 근사법은 완화 커널 함수(Smoothing Kernel Function) 또는 무게 함수(Weight Function)로 표현될 수 있다. SPH에서 함수 $f(\mathrm{r})$의 커널 근사법은 다음과 같이 부피 V에 대한 적분식으로 정의된다.

$$f(\mathrm{r}) = \int_V f(\mathrm{r}')\delta(\mathrm{r}-\mathrm{r}')d\mathrm{r}' \tag{1}$$

여기서 f는 부피 V에 대한 위치 벡터 r 또는 r′의 함수이고 $\delta(\mathrm{r}-\mathrm{r}')$은 디락 델타(Dirac Delta)이다. 디락 델타는 $\mathrm{r}=\mathrm{r}'$일 때 1이고 $\mathrm{r}\neq\mathrm{r}'$일 때 0의 값을 갖는다. 만약 디락 델타가 완화 길이 h에서 완화 커널 W에 의해 표현된다면 근사된 함수 $f_p(\mathrm{r})$는 완화된 커널 W에 대하여 다음과 같이 얻어진다.

$$f(\mathrm{r}) = \int_V f(\mathrm{r}')\,W(r-r')d\mathrm{r}' \tag{2}$$

SPH 방법에서 완화 커널 함수를 결정하는 것은 매우 중요하며 가장 많이 사용되는 완화 커널 함수는 B-스플라인 함수(B-spline Function)이다. 수치 해석을 하기 위해 식(1)은 $|\mathrm{r}-\mathrm{r}'| < \kappa h$ 장에 대한 요약으로 근사화 되며 어떤 점 a에서의 밀도는 주변 입자의 질량과 완화 함수에 의해 다음과 같이 정의된다.

$$\rho_a = \sum_b m_b W_{ab} \tag{3}$$

Navier-Stokes 방정식은 점성을 가진 유체의 운동을 기술하는 비선형 편미분방정식으로 유체 도메인을 위한 Navier-Stokes의 운동량 균형 방정식(Momentum Balance Equation)은 다음과 같다.

$$\frac{D\mathrm{v}(\mathrm{r}_a)}{Dt} = \sum_b m_b\left(\frac{\sigma(\mathrm{r}_a)}{\rho_a^2} + \frac{\sigma(\mathrm{r}_b)}{\rho_b^2}\right)\nabla_a W_{ab} \tag{4}$$

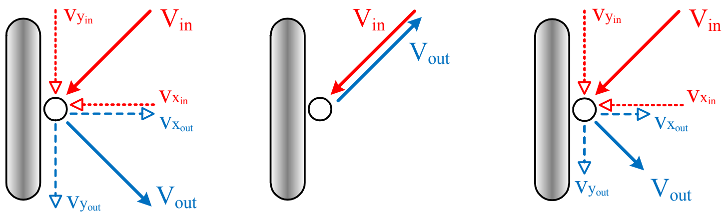
여기서 r_a와 r_b는 각각 a점과 b점에 위치한 유체 입자의 위치 벡터를 의미하며 식(4)를 통해 입자의 비일관성 문제(Particle Inconsistency Problem)로 인한 오류가 줄어들게 된다.

3. SPH의 경계조건 분석

SPH의 제안된 경계조건을 몇 가지 살펴보면 첫 번째로 계산 영역을 통과하는 유체 입자들의 경계면 침투를 막기 위해 경계면에 있는 유체 입자의 정반사(Specular Reflection)가 제안된다. 정반사는 거울과 같이 매끄러운 표면에서 입자의 가속도 성분이 정반대의 방향으로 전도될 때 그 값이 유지되는 것을 의미한다. 즉, 정반사는 그림 1(a)와 같이 입자 운동량의 단위 성분이 전도되고 접선 성분은 변하지 않는 방법이다. 정반사를 이용한 접근법은 입자들이 경계를 통과하지 않고 흐름 영역 안에 남아있도록 하기에 매우 효과적이며 선

형 경계 조건에서 쉽게 적용된다. 그러나 곡선 또는 기울기가 있는 표면을 가지는 기하학적 구조에서는 복잡한 충돌 알고리즘(Collision Algorithm)이 요구된다.

두 번째는 입자가 벽에 충돌하여 두 속도 성분이 반대가 될 때 속도가 다시 회복되는 과정(Bounce-back Procedure)을 갖는 방법으로 비슬립 조건(No-slip Condition)이라고도 한다. 이 방법은 그림 1(b)와 같이 입자 운동량의 수직과 접선 성분들이 반대되는 방법이다. 위의 두 접근법의 사용은 입자들의 경계 침투를 막지만 경계에 의한 커널 끊김 현상(Kernel Truncation) 때문에 발생하는 문제는 해결되지 않는다. 뿐만 아니라 이러한 접근법들은 고체 경계 부근에서의 흐름에 상당한 뒤틀림을 가져오게 된다.



(a) (b) (c)

그림 1. SPH의 벽면 경계 조건

(a) Specular reflection, (b) Bounce-back reflections, (c) Maxwellian reflections.

세 번째는 유체 입자를 다른 유체 입자에 재도입(Reintroduce)하는 방법으로 다른 유체 입자는 맥스웰 분포(Maxwell Distribution)로 계산된 속도 분포를 가지게 된다. 즉, 그림 1(c)에서 보이는 바와 같이 벽면에서의 입자 속도에 절반이 되는 속도가 맥스웰 분포를 통해 입자에 입력된다. 또 다른 접근법으로는 경계 침투를 시도하는 입자들을 막기 위해 여러 가지 경계 반발력이 자주 사용되어왔다. 이 방법은 고체 경계의 표면에 경계 입자들을 배치하여 경계에 인접한 입자들 즉, 커널 끊김 현상을 가지는 입자들에 증가하는 반발력을 가하는 방법으로 반발력은 입자들이 경계를 침투하는 것을 막는 역할을 하게 된다. 일반적으로 사용되는 반발력은 레너드 존스 포텐셜(Lennard-Jones Potential) 힘으로써 $r_{ab}/r_0 \leq 1$일 때 다음과 같이 표현된다.

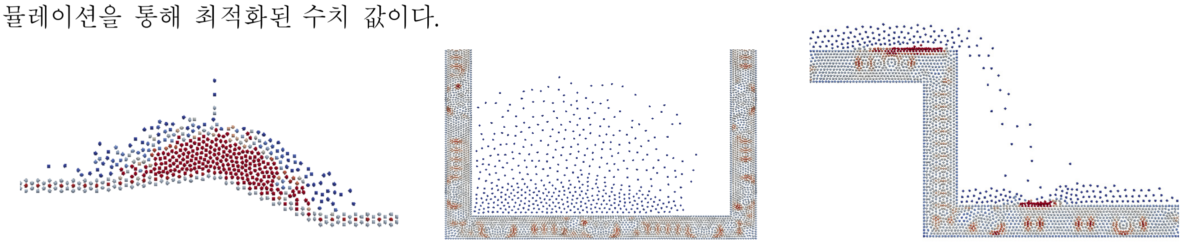
$$F_{ab} = \left[\left(\frac{\mathrm{r}_0}{\mathrm{r}_{\mathrm{ab}}} \right)^{12} - \left(\frac{\mathrm{r}_0}{\mathrm{r}_{\mathrm{ab}}} \right)^{4} \right] \frac{K\mathrm{r}_{\mathrm{ab}}}{\mathrm{r}_{\mathrm{ab}}^2} \tag{5}$$

여기서 r_0는 컷오프 거리(Cutoff Distance)이고 K는 종속 매개변수이며 일반적으로 시스템에서의 가장 큰 속도가 사용된다. 마지막으로 가장 정확하고 안정된 접근법으로는 격자 또는 입자 유형의 도메인 외부에 가상 입자(Ghost Particle)를 만드는 방법으로 모든 가상 입자들과 관계되는 유체 입자의 장을 추론하여 가상 입자장을 알게 된다. 그러나 이러한 방법은 복잡한 경계 모양을 다루는 데 상당한 한계를 가지기 때문에 복잡한 경계에 따른 유동 도메인 경계를 다룰 수 있는 방법들이 계속해서 제안되고 있다.

4. 수치 해석

일반적으로 경계 입자들의 압력과 밀도는 유체 입자에 영향을 미치게 되며 경계 입자와 유체 입자 사이의 반발력은 완화길이 안에 집중되어 있는 입자들과 관련이 있다. 그러므로 유체 입자들을 반사시키기 위해서는 완화길이 안에 있는 유체 입자들보다 경계 입자들이 더 많이 필요하게 된다. 본 논문에서는 세 가지 현상에 대한 시뮬레이션이 진행되었으며 유체 입자와 경계 입자 간 밀집도 및 반발력 개념이 고려되어 가장 적합한

경계조건이 제안되어 진다. 그림 2는 각각 (a) 뾰족한 모서리 부분에 원형 유체 입자가 낙하하는 경우와 (b) ㄷ자형 수조에 원형 유체 입자가 낙하하는 경우 및 (c) 계단식 경사가 있는 부분에 사각형 유체 입자가 낙하하는 경우를 시뮬레이션 한 모습이다. 이 때 각 입력 값들은 표 1에서 보이는 바와 같고 이는 여러 가지 시뮬레이션을 통해 최적화된 수치 값이다.



(a) Case 1 (b) Case 2 (c) Case 3

그림 2. SPH 시뮬레이션

표 1. SPH 시뮬레이션의 입력 값

	Case 1	Case 2	Case 3
Speed of sound c	$5\,m/s$	$2\,m/s$	$0.5\,m/s$
Smoothed length h	$0.05\,m$	$0.01\,m$	$0.01\,m$
Time increment	$0.001\,sec$	$0.001\,sec$	$0.001\,sec$
Gravity Acc. g	$9.8\,m/s$	$9.8\,m/s$	$9.8\,m/s$

본 논문에서는 세 가지 현상에 대한 시뮬레이션을 통해 c값으로 유체 입자의 확산 정도가 결정되고 완화길이가 유체 입자와 경계 입자의 유효반경에 영향을 미친다는 것이 증명된다.

5. 결론

입자들의 경계 침투를 막기 위해서는 유체 입자들이 높은 밀도를 가지고 있을수록 매우 많은 경계 입자들이 요구되며 유체 입자들이 높은 속도를 가지고 있을수록 매우 작은 시간 증가가 필요하게 된다. 이는 수치적 비효율성을 가져오게 되기 때문에 SPH가 좀 더 효율적으로 실행되기 위해 병렬 해석의 접목이 요구된다. 또한 SPH에 기존의 수치해석 기법을 결합하여 경계 영역에 유한요소의 적용과 같은 좀 더 개선된 경계 처리법이 제안된다.

감사의 글

본 연구는 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 세계수준의 연구중심대학 육성사업(WCU)으로부터 지원받아 수행되었습니다(R32-2008-000-20042-0). 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

Gingold, R.A., Monaghan, J.J. (1977) Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181(2), pp.375~389.

Lucy, L.B. (1977) A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *Astronomical Journal*, 82(12), pp.1013~1024.

Moonho, Tak. (2011) *Computational coupled and parallel analysis for porous media*, Ph.D. Thesis, Hanyang University, Seoul, Korea.