

계면경계 문제의 효율적인 해석을 위한 계면경계조건이 매입된 이동최소제곱 차분법

An effective MLS Difference Method with immersed interface for solving interface problems

윤 영 철†
Yoon, Young-Cheol

요 약

이종재료의 열전달문제 수치해석시 추가적으로 만족시켜야 하는 계면경계조건들의 존재와 계면경계로 인한 불연속면의 처리는 근사함수의 구성 뿐만 아니라 수치기법의 개발 자체를 어렵게 만든다. 본 논문에서는 계면경계의 불연속성을 모델링하는 특수한 함수를 포함하고 계면경계조건을 항상 만족시킬 수 있는 근사함수를 구성하고, 계면경계문제의 강형식을 직접 이산화하며 고속으로 해를 계산할 수 있는 이동최소제곱 차분법을 제시한다. 계면경계조건이 매입된 이동최소제곱 차분법으로 이종재료의 열전달문제를 해석한 결과, 높은 정확성과 효율성을 갖는 것을 확인할 수 있었다.

keywords: 이종 재료, 열전달문제, 계면경계, 이동최소제곱 차분법

1. 서론

이종재료의 열전달문제는 계면경계(interface)를 따라 해의 미분이 불연속을 나타내는 특징을 나타내며, 열 유속(heat flux)에 대한 계면경계조건을 추가로 만족시켜 주어야 한다. 따라서 일반적인 수치해석 방법으로는 정밀한 해석이 어려우며, 불연속면을 처리할 수 있는 근사함수를 갖는 확장된 유한요소법(Moes 등, 1999)이나 계면경계 근방에서 차분식을 수정한 유한차분법(LeVeque과 Li, 1994)과 같이 특수하게 고안된 수치기법으로만 정밀한 해석이 가능하다. 그러나 이러한 수치해석기법들도 임의로 위치한 불연속면으로 인해 근사함수의 구성이 상당한 제약을 받고 계면경계 모델링으로 인한 자유도 증가가 최종적인 계방정식의 크기를 증가시키는 단점이 있다. 한편, 무요소법에서 빈번하게 사용되는 이동최소제곱법은 근사함수의 구성에 상당한 유연성을 갖고 있어서 다양한 조건들을 매입하는 것이 가능하고 절점 단위에서 강형식을 직접 이산화하고 만족시키는 접근방식이 유리하다는 것이 알려져 있다.(윤영철 등, 2007) 이와 같은 특성을 잘 활용하면, 기존의 유한요소법이나 유한차분법이 갖는 단점을 효과적으로 극복하는 수치기법의 개발이 가능하다. 윤영철과 김도완(2007)은 규칙적으로 분포된 절점을 바탕으로 이동최소제곱법을 이용하여 불연속 함수를 포함하는 차분식을 구성하여 이종재료의 열전달문제를 정밀하게 해석했지만, 계면경계의 모델링으로 인해 계 방정식의 크기가 증가되어 효율성이 감소되는 문제점이 있었다. 본 연구에서는 계면경계조건을 근사함수에 직접 매입하여 차분식이 계면경계조건을 자동으로 만족하도록 함으로써 자유도의 증가 없이 이종재료의 열전달문제를 정확하게 해석할 수 있는 수치기법을 제시한다.

† 정회원 · 명지전문대학 토목과 부교수
Tel: 02-300-1135 ; Fax: 02-303-1132
E-mail: ycyoon@mjc.ac.kr

2. 계면경계조건이 매입된 근사함수

열전도 방정식에서 시간에 대한 항을 제외하고 계면경계 Γ 로 인한 계면경계조건이 추가된 이종재료의 열전달문제의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega \setminus \Gamma \quad (1)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \partial\Omega \quad (2)$$

$$[u]_{\Gamma} = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (3)$$

$$\left[\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = \bar{h} \quad \text{on } \Gamma \quad (4)$$

여기서 f 는 열원(heat source)이고, κ 는 열전달계수인데 이종재료는 서로 다른 값을 갖는다. 계면경계조건은 식 (3)의 해의 연속조건과 식 (4)의 계면경계를 통과하는 κ 를 포함한 수직방향 열유속(heat flux)의 점프(jump)에 대한 조건식으로 주어진다.

이동최소제곱 차분법의 정규 근사식은 Taylor전개에 근거하여 다음과 같이 주어진다. (윤영철 등, 2007),

$$u^R(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) := \mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 은 m 차 다항식으로 구성된 기저함수이고 $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 는 Taylor 전개식의 미분계수를 포함하는 미지의 벡터이다. 즉, 식 (5)는 결국 $\bar{\mathbf{x}}$ 근방에서 전개한 임의의 위치 \mathbf{x} 에서의 함수값 $u(\mathbf{x})$ 에 대한 Taylor 전개를 의미한다. 이종재료의 열전달문제를 해석하기 위한 계면경계 근방에서의 미분불연속을 갖는 확장된 근사식은 다음과 같다. (윤영철과 김도완, 2007)

$$u^S(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) := \mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) + b_s(\bar{\mathbf{x}}) b_{\Gamma}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \quad (6)$$

여기서 $b_{\Gamma}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 는 미분불연속을 갖는 썩기함수이고, $b_s(\bar{\mathbf{x}})$ 는 썩기의 각도 또는 미분불연속의 크기를 결정하는 계수이다. 위 식에 식 (4)의 조건을 적용하면, 다음과 같이 식 (4)의 계면경계조건을 항상 만족시키는 확장된 근사식을 얻을 수 있다.

$$u^S(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) := \left(\mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) - \frac{[\kappa]_{\Gamma}}{2\langle \kappa \rangle_{\Gamma}} \nabla \mathbf{p}_m^T(\bar{\mathbf{x}}_{\Gamma}, \bar{\mathbf{x}}) b_{\Gamma}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \right) \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\bar{h}}{2\langle \kappa \rangle_{\Gamma}} b_{\Gamma}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \quad (7)$$

여기서 $\bar{\mathbf{x}}_{\Gamma}$ 는 $\bar{\mathbf{x}}$ 의 Γ 위로의 투영점, $[\kappa]_{\Gamma}$ 는 계면경계에서 열전달계수의 차이, $\langle \kappa \rangle_{\Gamma}$ 는 계면경계에서 열전달계수의 평균값이다. 절점이 적절하게 분포된 해석영역에서 이동최소제곱법을 이용하여 미지의 벡터 $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 를 계산하면, 실제적인 미분계산 없이도 m 차까지의 미분근사식을 얻게 된다. 또한, 식 (7)은 썩기함수를 포함하고 있어서 한번 미분을 취하게 되면 점프를 갖지만 근사식 자체는 연속이기 때문에 식 (3)의 계면경계조건을 자동으로 만족시킨다. 이동최소제곱법을 사용하여 미지의 벡터를 구한 후, α 차 미분근사식을 형상함수를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$D_{\mathbf{x}}^{\alpha} u(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{I=1}^N \Phi_I^{\alpha}(\mathbf{x}) u_I + \frac{\bar{h}}{2\langle \kappa \rangle_{\Gamma}} \left(b_{\Gamma}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) - \sum_{I=1}^N \Phi_I^{\alpha}(\mathbf{x}) b_{\Gamma}(\mathbf{x}_I, \bar{\mathbf{x}}) \right) \quad (8)$$

여기서 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 이며, 예를 들어, $\alpha = (1, 1)$ 은 2차원 문제에서 $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ 를 가리킨다. 식 (8)의 형상함수 $\Phi_I^{\alpha}(\mathbf{x})$ 는 식 (5)로부터 계산된 일반적인 형상함수와 달리 계면경계조건 식(4)를 만족시키기 위한 항들이 내재적으로 포함되어 있는 새로운 형태임을 주목할 필요가 있다. 결국, 식 (7) 또는 식 (8)이 계면경계조건을 모두 만족시키기 때문에 계면경계조건에 대한 추가적인 고려 없이도 각 절점에서 지배방정식에 대한 차분식을 구성하고 계 방정식을 풀어서 절점해인 미지계수 u_I 를 구할 수 있다.

3. 지배방정식에 대한 차분식의 구성

이종재료의 열전달 방정식을 풀기 위해 평형방정식 식 (1)과 경계조건식 식 (2)에 대한 차분식을 구성해야 한다. 전술한 바와 같이 본 연구에서 제안한 근사식이 계면경계조건을 자동으로 만족시키기 때문에 다음과 같은 차분식의 구성만으로 해석이 가능하다.

$$\kappa(\mathbf{x}_J)\Delta u(\mathbf{x}_J) + \nabla \kappa(\mathbf{x}_J) \cdot \nabla u(\mathbf{x}_J) = f(\mathbf{x}_J), \mathbf{x}_J \in A_\Omega \quad (9)$$

$$u(\mathbf{x}_K) = \bar{u}(\mathbf{x}_K), \mathbf{x}_K \in A_{\partial\Omega} \quad (10)$$

여기서 A_Ω 와 $A_{\partial\Omega}$ 는 각각 내부영역의 절점과 경계절점의 집합을 나타낸다. 라플라시안(Laplacian)과 그라디언트(Gradient)는 미분근사식 식 (8)을 이용하여 계산한다. 예를 들어 계면경계 근방(\mathbf{x}_K)에서 차분식을 구성할 때 미지계수인 u_I 와 관련된 항들만 좌변에 남고 나머지 기지값들을 모두 우변으로 넘겨서 다음과 같은 이산화된 차분식을 구성한다.

$$\begin{aligned} & \kappa \left(\sum_{I=1}^N (\Phi_I^{(2,0)}(\mathbf{x}_K) + \Phi_I^{(0,2)}(\mathbf{x}_K)) u_I \right) + D_{\mathbf{x}}^{(1,0)} \kappa \sum_{I=1}^N \Phi_I^{(1,0)}(\mathbf{x}_K) u_I + D_{\mathbf{x}}^{(0,1)} \kappa \sum_{I=1}^N \Phi_I^{(0,1)}(\mathbf{x}_K) u_I \\ & = f(\mathbf{x}_K) - \frac{\kappa \bar{h}}{2 \langle \kappa \rangle_\Gamma} \left(D_{\mathbf{x}}^{(2,0)} b_\Gamma(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_K) - \sum_{I=1}^N \Phi_I^{(2,0)}(\mathbf{x}_K) b_\Gamma(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_K) + D_{\mathbf{x}}^{(0,2)} b_\Gamma(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_K) - \sum_{I=1}^N \Phi_I^{(0,2)}(\mathbf{x}_K) b_\Gamma(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_K) \right) \\ & - \frac{\bar{h}}{2 \langle \kappa \rangle_\Gamma} \left(D_{\mathbf{x}}^{(1,0)} \kappa \left\{ D_{\mathbf{x}}^{(1,0)} b_\Gamma(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_K) - \sum_{I=1}^N \Phi_I^{(1,0)}(\mathbf{x}_K) b_\Gamma(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_K) \right\} + D_{\mathbf{x}}^{(0,1)} \kappa \left\{ D_{\mathbf{x}}^{(0,1)} b_\Gamma(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_K) - \sum_{I=1}^N \Phi_I^{(0,1)}(\mathbf{x}_K) b_\Gamma(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_K) \right\} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

이제 절점순서대로 평형방정식과 경계조건식에 대한 차분식을 어셈블하여 전체 계방정식을 구성하고 풀면 절점해 u_I 를 얻는다. 단, 차분식 구성을 위해 계면경계를 이산화(discretization)하는 과정은 필요하다. 그러나 계면경계 상에 부여된 미지계수가 없기 때문에 전체 계 방정식의 크기는 증가하지 않는다. 다만 계면경계에 대한 미분점프를 모델링하는 정밀도가 평형방정식의 차분식의 정확도에 영향을 미치므로 절점분포의 정밀도를 반영할 수 있도록 적절한 간격으로 계면경계를 분할해 주어야 한다.

4. 수치예제

원형 매입물(inclusion)을 갖는 이종재료의 열전달문제에 대한 해석을 수행하여 제안된 수치기법의 정확성을 검증했다. 열원과 열전달계수가 식 (12), 식 (13)과 같이 주어지고, 정확해가 식 (14)와 같이 정해지는 경우를 고려한다.

$$f = 8(x^2 + y^2) \quad (12)$$

$$k(x, y) = \begin{cases} k^- = x^2 + y^2 + 1, & x^2 + y^2 < 1/4 \\ k^+ = c, & x^2 + y^2 \geq 1/4 \end{cases} \quad (13)$$

$$u(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 < 1/4 \\ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{8c} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{c} \left(\frac{(x^2 + y^2)^2}{2} + (x^2 + y^2) + \frac{1}{10} \log(2(x^2 + y^2)) \right), & x^2 + y^2 \geq 1/4 \end{cases} \quad (14)$$

해석시 $c = 100$ 로 두어 열전도계수의 차가 100배 가까이 나도록 설정했다. 이 경우 미분방정식의 solvability가 상당히 나빠지기 때문에 계면경계에 대한 정확한 고려가 되지 않으면 정확한 해를 얻을 수 없다.

오차분석을 위해 400개, 1600개, 6400개의 절점을 갖는 모델을 해석했다. 그림 1은 온도와 온도 그라디언트에 대한 L^∞ 오차의 수렴률을 보여준다. 수렴률 곡선의 기울기로부터 2차 정확도가 확보되는 것을 알 수 있다. 계면경계문제에서 2차의 정확도를 얻기 어렵기 때문에 이는 상당히 고무적이다. 그림 2에는 6400개 절점 모델로 계산한 온도분포의 모습이다. 원형 매입물 경계를 따라 썩기모양의 해가 확연히 나타나는 것을 볼 수 있다. 그림 3과 4에는 온도 그라디언트의 x방향, y방향 성분을 도시했는데, 원형 매입물의 계면경계에서 점

프가 나타나는 것을 확인할 수 있다. 계면경계 주변에서 점프값이 뭉개지지 않고 날카롭게 묘사되고 있는데, 이는 본 연구에서 제시된 미분근사식이 계면경계조건을 정확히 만족시키고 있다는 것을 보여준다.

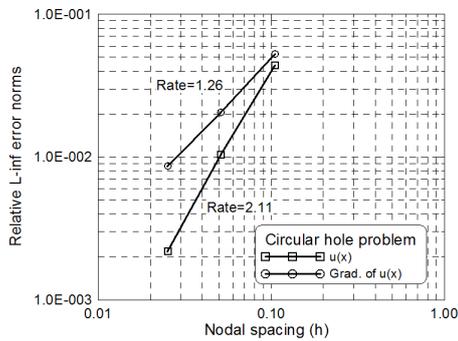


그림 1 계면경계문제의 L^∞ 오차 수렴률

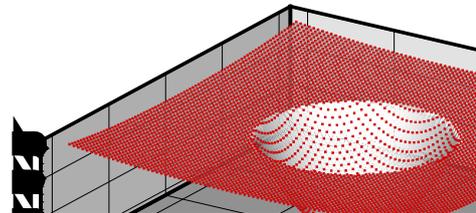


그림 2 온도(u) 분포

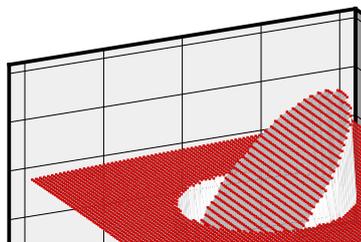


그림 3 온도그라디언트의 x방향성분($\frac{\partial u}{\partial x}$)

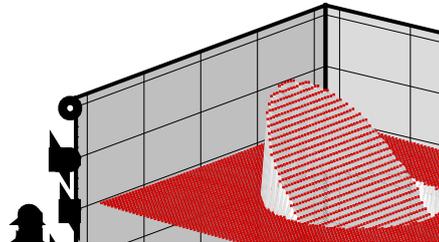


그림 3 온도그라디언트의 y방향성분($\frac{\partial u}{\partial y}$)

4. 결론

본 논문에서는 계면경계조건이 근사함수 안으로 매입되어 계면경계조건을 자동으로 만족시키는 이동최소제곱 차분법을 제시했다. 미분불연속 묘사가 가능한 근사함수 덕분에 계면경계는 절점과 상관없이 자유롭게 모델링된다. 이중재료의 열전달방정식은 규칙적으로 분포된 절점들 위에서 직접 차분식으로 만들어지기 때문에 계산속도가 빠르다. 계면경계 모델링을 위한 추가의 자유도가 필요치 않아 전체 계방정식의 크기가 늘어나지 않는 장점이 있어서 기존 이동최소제곱 차분법의 계산효율성을 효과적으로 개선한다. 이중재료의 열전달에 관한 수치예제를 통해 수렴도를 조사하여 개발된 수치기법이 2차 정확도를 갖는 것을 보였다.

참 고 문 헌

- LeVeque, R. J., Li, Z. (1994) The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J. Numer. Anal.* 31, pp.1019~1044.
- Moes, N., Dolbow, J. and Belytschko, T. (1999) A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering Volume* 46(1): 131~150.
- 윤영철, 김동조, 이상호 (2007) 탄성균열해석을 위한 그리드 없는 유한차분법, 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp.321-327.
- 윤영철, 김도완 (2007) 이동최소제곱 유한차분법을 이용한 계면경계를 갖는 이중재료의 열전달문제 해석, 한국전산구조공학회 논문집, 20(6), pp.779-787.