

ALE를 이용한 관내 유동의 자유경계면 해석

Free Surface Analysis in Pipe Flows using the ALE Method

유 정 두* · 탁 문 호** · 박 대 효***
Jung-Doo You · Moon-Ho Tak · Taehyo Park

요 약

일반적으로 물체의 거동을 해석하기 위해 고체영역에서는 Lagrangian 기법이 유체영역에서는 Eulerian 기법이 수치해석에 적용된다. Lagrangian 기법은 서로 다른 물질의 경계와 자유표면에 대한 거동을 쉽게 추적할 수 있는 반면 물체의 대변형시 해석의 정확성이 떨어지는 단점이 있다. 또한 Eulerian 기법은 물질이동만을 고려하여 변형의 제한이 없는 장점을 가지고 있지만 이동하는 경계에 대해서 조건을 변화 시켜야 하는 어려움이 있다. 따라서 이 두기법의 장단점을 서로 보완하기 위해 ALE(Arbitrary Lagrangian Eulerian)기법이 제안되었으며 이를 적용한 유체-구조물의 상호작용 해석에 대하여 많은 연구가 진행되고 있다. 본 논문에서는 이러한 ALE기법을 이용한 자유경계면에 대한 새로운 알고리즘이 제안된다

keywords : Lagrangian기법, Eulerian기법, ALE(Arbitrary Lagrangian Eulerian), 자유경계면(Free surface)

1. 서 론

지금까지 유체와 구조물의 상호작용을 고려한 수치해석방법이 많은 분야에서 연구되어지고 있다. 이러한 유체-구조물의 상호작용에서 중요한 부분을 차지하고 있는 것 중 하나는 유체흐름에서의 자유경계면 해석이다. Edwards(1969)가 유한요소를 이용하여 원통형 구조물을 축대칭 요소로 모형화하여 자유수면 및 구조물을 해석한 것을 시작으로 Lay(1993)는 저장 구조물을 유한요소로 모델링하고, 유체를 선형 경계조건을 고려한 경계요소로 모델링한 후 이를 조합하는 방법으로 원통형 유체 저장구조물 및 자유수면의 동적거동을 해석하였다. 일반적으로 물체의 변형이나 거동을 해석하기 위해 고체영역에서는 Lagrangian 기법, 유체영역에서는 Eulerian 기법이 수치해석에 적용되어 왔다. Lagrangian 기법은 시간의 흐름에 따라 물체의 물질이동과 매쉬이동이 동일하게 움직이도록 하여 해석을 수행한다. 따라서 서로 다른 물질의 경계와 자유표면에 대한 거동을 쉽게 추적할 수 있다. 하지만 물질이 대변형을 일으킬 경우 외곡현상(distortion)이 일어나 해석의 정확성이 떨어지는 경우가 발생한다. 따라서 Lagrangian 기법으로 움직이는 자유경계면을 해석할 경우에는 변형의 한계를 가지게 된다. 반면, Eulerian 기법은 매쉬이동은 없고 물질이동만을 고려해 변형의 제한이 없는 장점을 가진다. 그러나 경계조건(boundary condition)이 움직일 경우 해석하기가 매우 복잡하다. 이러한 Lagrangian 기법과 Eulerian 기법의 한계를 보완하고 장점을 극대화 시킨 ALE(Arbitrary Lagrangian Eulerian)기법이 Belytschko and Kennedy(1978)에 의해 제안되었다. 물질이동에서는 Lagrangian기법을 매쉬이동에서는 Eulerian기법을 사용하여 유체와 구조물의 상호작용에서 발생하는 경계면 해석과 시간에 따른 유

* 한양대학교 건설환경공학과 석사과정 civildoo@hanyang.ac.kr

** 한양대학교 건설환경공학과 박사후 연구원 pivotman@hanyang.ac.kr

*** 정회원 · 한양대학교 건설환경공학과 교수 cepark@hanyang.ac.kr

체와 고체의 자유 경계면 문제를 해석하는데 적합하다. 본 논문에서는 유체의 흐름에 따른 자유경계면 해석에 관한 새로운 ALE 알고리즘이 제안된다.

2. 이론 정식화

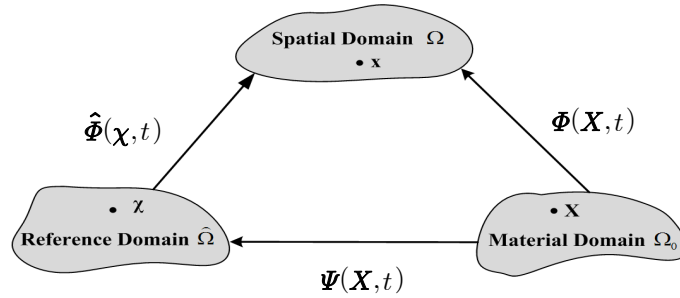


그림 4. Lagrangian, Eulerian, ALE 영역들간의 사상관계

그림 1에서 보는 바와 같이 물질 영역에서의 좌표체계는 \mathbf{X} , 공간 영역에서의 좌표체계는 \mathbf{x} 로 표시된다. ALE 영역에서의 좌표체계를 $\boldsymbol{\chi}$ 로 나타내고 Lagrangian과 Eulerian 그리고 ALE 영역들을 사상(mapping)시키는 역할을 한다. Φ 는 물질영역으로부터 공간영역, Ψ 는 물질영역으로부터 ALE 영역, $\hat{\Phi}$ 는 ALE 영역으로부터 공간영역으로 사상 시켜주는 함수를 말한다. Eulerian 관점 내에서 입자운동은 위치벡터 $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t)$ 와 속도벡터 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 로 표시할 수 있고 벡터함수 $f(\mathbf{x}, t)$ 에 대한 물질시간도함수(material time derivative)는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{Df(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

ALE 관점에서 입자운동이 식 (1)과 같이 주어졌을 때 물질속도벡터(material velocity vector) \mathbf{v} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \hat{\mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \boldsymbol{\chi}} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2)$$

여기서 $\hat{\mathbf{v}}$ 는 매쉬속도벡터(mesh velocity vector)이며 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\partial \hat{\Phi}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \quad (3)$$

그리고 전달속도벡터 \mathbf{c} , 즉 물질속도벡터 \mathbf{v} 와 매쉬속도벡터 $\hat{\mathbf{v}}$ 의 차는 식 (4)와 같이 표현된다.

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \boldsymbol{\chi}} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (4)$$

식 (4)을 이용해 ALE관점 내 임의의 함수 $f(\boldsymbol{\chi}, t)$ 에 대한 물질시간도함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{Df(\boldsymbol{\chi}, t)}{Dt} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f(\boldsymbol{\chi}, t) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \boldsymbol{\chi}} \quad (5)$$

다음으로 본 논문에서 유체영역의 지배 방정식은 Navier-stokes 방정식이 이용되었으며 운동 점성계수가 일정하다고 가정하여, 비압축성 점성유동에 대한 Navier-Stokes의 운동량방정식을 다음과 같이 나타낸다.

$$\rho \frac{Df(\mathbf{x}, t)}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (6)$$

위 식에 ALE에 대한 물질시간도함수인 식 (5)를 적용하면 다음과 같이 나타나게 된다.

$$\rho \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (7)$$

여기서 \mathbf{v} 는 유체 속도벡터, $\boldsymbol{\tau}$ 는 응력텐서(tress tensor), ρ 는 유체 밀도(fluid density), \mathbf{f} 는 체적력 벡터(body forces vector)이다. 그리고 비압축성 제한조건인 $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 을 적용한다.

식 (7)을 Weighed Residual방법과 Galekin방법을 사용하여 v-p formulation으로 표현하여 FEM 정식화를 하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}\mathbf{v} + \mathbf{C}\mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (8)$$

여기서, $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega$, $\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{N}^T d\Omega$, $\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T g d\Omega + \int_P \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS$ 이다.

\mathbf{B} 는 변위-변형률(strain-displacement) 행렬, \mathbf{C} 는 점성(viscosity) 행렬, \mathbf{t} 는 traction vector이다.

다음으로 본 논문에서 자유경계면 해석을 위해 제안된 ALE의 알고리즘은 그림 2와 같은 단계로 진행된다.

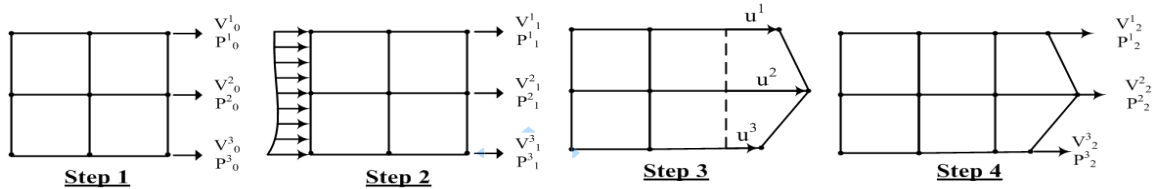


그림 2 자유경계면 해석을 위한 ALE 알고리즘 체계

step 1과 같은 초기조건상태에서 유입되는 유량으로 인해 step2에서는 자유경계면 노드에 속도와 압력이 결정된다. 그 후 step 3에서 자유경계면 영역의 노드들은 압력과 속도에 의해 매쉬이동이 일어난다. 이때 기존에 계산된 노드에서의 속도와 매쉬이동에 의한 속도차를 이용해 convective velocity가 계산된다. 마지막으로 step 4에서는 remesh된 노드에서의 압력과 속도가 convective velocity를 포함하고 있는 Lax-Wendroff method에 의해 최종 압력 및 속도가 결정된다. 이러한 단계를 반복함으로써 시간에 따른 유량변화에 대해 유체이동이 결정되며 자유경계면 또한 결정된다.

3. 수치해석

제안된 ALE 방법에 대한 설명에 앞서 본 논문에서는 ABAQUS를 이용한 자유경계면 해석을 수행하고 현재까지의 CFD 해석에서의 문제점이 검토된다. ABAQUS는 유체 해석시 Eulerian기법의 대표적 방법 중 하나인 VOF방법이 적용된다. 수치해석을 하기 위해 길이 5m, 지름 0.15m의 pipe를 모델링하고 자유경계면 움직임을 모사하기 위해 Eulerian영역을 지정한다. 관내에 흐르는 유체의 물성치는 표 1과 같고 이때 해석모델에서의 유량속도는 1 m/s이다.

표.1 실험 유체 물성치

gravity	density	viscosity	sound of speed
$9.81 \times 10^3 \text{ mm/s}$	$9.98 \times 10^{-7} \text{ kg/mm}^3$	$1 \times 10^{-8} \text{ Ns/mm}^2$	$1.45 \times 10^6 \text{ mm/s}$

우선 3차원 관내 유동 흐름에 대한 수치해석을 통해 요소크기에 따른 자유경계면 형상을 나타내기 위해 Eulerian영역의 요소 개수를 84개, 510개, 4400개로 각각 나누어 해석된다.

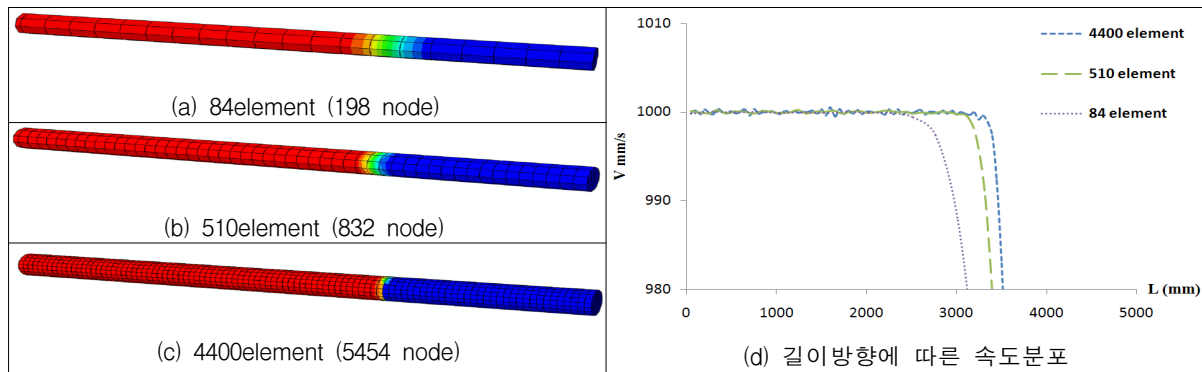


그림 3 요소개수에 따른 VOF기법의 관내 유동형상 및 길이방향에 따른 속도분포
 지금까지 유한요소법을 이용한 자유경계면 해석에서는 VOF 방법이 가장 우수하게 모사 가능한 방법으로 평가되고 있다. 그러나 그림 3의 (a), (b), (c)에서 볼 수 있듯이 요소의 개수가 적어질수록 자유경계면에 대한 정확한 정의를 내리기가 힘들다. 또한 그림 3의 (d)와 같이 임의의 시간에서 관 길이에 따른 속도 분포를 보면 자유경계면부근의 속도가 요소의 수에 따라 차이를 나타낸다. 이처럼 VOF방법을 통한 수치해석은 요소의 개수에 따라 자유경계면에 대한 모사와 해석값에 큰 영향을 미친다. 그러므로 제안된 ALE기법을 통한 요소개수에 독립적인 자유경계면 해석이 요구된다.

4. 결론

VOF를 이용한 자유경계면 수치해석 방법은 그림 3에서와 같이 느슨한 매쉬배열에서는 정확한 모사가 힘들다. 그러므로 자유경계면의 정확한 해석을 위해서는 자유경계면 영역에 조밀한 매쉬배열이 요구된다. 그러나 이러한 조건들은 해석시간을 많이 필요로 하고 또한 해석의 정확성에도 검증이 필요하다. 그러므로 ALE기법을 사용해 해석시간을 단축하고 해석값을 신뢰할 수 있는 효율적인 새로운 자유경계면 해석방법이 요구된다. 추후 연구에서는 제안된 ALE 알고리즘을 이용하여 자유경계면이 진행될 예정이다. ALE 특성을 고려한 내부 매쉬에서는 Eulerian을 관과 관련된 매쉬들은 Lagrangian을 관내의 자유경계면에서는 remeshing 기법과 함께 위에서 제안된 기법이 적용될 것이다.

감사의 글

본 연구는 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 세계수준의 연구중심대학 육성사업(WCU)으로부터 지원받아 수행되었습니다(R32-2008-000-20042-0). 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- Belyshko, T. and Kennedy J.** (1978) Computer model for subassembly simulation, Nuclear engineering and design, vol.49, no.1, pp.7-38.
- Edwards, N.W.** (1969) A Procedure for the Dynamics Analysis of Thin Walled Cylindrical Liquid Storage Tanks, Ph.D. thesis, Univ. of Michigan, Ann Arbor.
- Lay, K.S.** (1993), Seismic Coupled Modeling of Axisymmetric Tanks Containing Liquid, Journal of Engineering Mechanics, Vol.119, pp.1747-1761.