

지진해석을 위한 차수축소기법의 비교

Comparison of Order Reduction Methods for Seismic Analysis

한 정 삼* · 권 기 범**

Han, Jeong-Sam · Kwon, Ki-Beom

요 약

일반적으로 고층건물이나 교량 등의 지진하중 하에서의 내진 성능 향상을 위해서는 과도지진해석을 수행하는 것이 필요하다. 본 논문에서는 이러한 지진해석을 수행하는데 Krylov 부공간 축소기법을 이용하는 것을 제안하고 기존의 모드중첩법을 이용한 축소기법과 비교하였다. 해석에서 지진하중은 El Centro Earthquake (1940)의 데이터를 이용하였으며 고층건물 모델을 이용하여 두 방법을 정확성과 효율성 측면에서 비교한 수치결과를 제시하였다.

keywords : 모델차수축소법, 지진해석, Krylov 부공간, 모드중첩법, El Centro 지진

1. 서 론

고층건물이나 교량 등의 내진 성능 향상을 위해서 비교적 계산시간이 적게 소요되는 스펙트럼해석이 많이 이용되어 왔으나 이 해석은 과도지진해석에 비하여 정확하지 못하고 위상(phase) 정보를 포함하지 않은 최대응답만을 제공하기 때문에 더욱 정확한 내진해석 과 설계를 위해서는 과도지진해석이 필요하다. 또한 대부분의 고층건물이나 교량 등은 그 복잡성과 형상으로 인하여 수십만 자유도를 상회하는 대형 유한요소모델이 되기 때문에 이러한 대형 유한요소모델로 다양한 하중정보를 가지는 과도지진해석을 수행하기는 현실적으로 불가능하다. 따라서, 본 논문에서는 이러한 지진해석을 수행하는데 Krylov 부공간 축소기법을 이용하는 것을 제안하고 기존의 모드중첩법을 이용한 축소기법과 비교하였다. 지진하중은 El Centro Earthquake (1940)의 데이터를 이용하였으며 고층건물 모델을 수치예제로 선택하여 정확성과 효율성 측면에서 비교한 수치결과를 제시하고자 한다.

2. Krylov 부공간 모델차수축소법

일반적인 구조물의 운동방정식을 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 이차 상미분방정식으로 표현된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

이때 \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 및 $\mathbf{F}(t)$ 는 시스템의 질량, 감쇠, 강성 및 하중이며, $\mathbf{x}(t)$ 는 상태변수벡터이다. 많은 경우에 식 (1)의 시스템에서 실제로 필요한 자유도의 출력응답 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 은 $\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{x}$ 처럼 상태변수벡터의 선형결합으로 나타낼 수 있다. Krylov 모델차수축소법은 다음 관계를 만족하는 변환행렬 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ 을 구하여 초기 시스템의 큰

* 책임저자 · 정회원 · 안동대학교 기계설계공학과 교수 jshan@andong.ac.kr

** 학생회원 · 안동대학교 기계설계공학과 대학원생

자유도의 상태변수벡터를 작은 자유도로 구성된 축소 시스템의 상태변수벡터로 근사화하는 방법이다.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Vz}(t) \quad \text{where } \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n, n \ll N \quad (2)$$

따라서, 식(1)의 초기 시스템은 동일한 형태를 지닌 다음과 같은 이차 축소 시스템으로 변환된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{z}(t) &= \mathbf{F}_r(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}_r \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 축소행렬은 각각 $\mathbf{M}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$, $\mathbf{C}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$, $\mathbf{K}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$, $\mathbf{F}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{F}$ 및 $\mathbf{L}_r = \mathbf{L} \mathbf{V}$ 이 된다. Krylov 부공간에 근거한 모델차수축소법에 따르면 감쇠행렬이 비례감쇠로 표현되는 경우, 즉 $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ 인 경우에 식(5)의 변환행렬 \mathbf{V} 의 각 열벡터로 이루어진 모든 선형결합이 아래의 n 차 Krylov 부공간을 구성(span)하면, 초기 시스템과 축소 시스템의 첫 n 번째까지의 모멘트는 서로 일치함이 알려져 있다.

$$\mathfrak{K}_n(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}) = \text{span}\{\mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}, (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}, (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}, \dots, (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{n-1} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}\} \quad (4)$$

즉, 변환행렬 \mathbf{V} 를 구하는데 초기 시스템의 질량 및 강성행렬과 하중벡터를 이용한다. 이러한 열벡터로 이루어진 변환행렬은 수치적으로 아놀디과정(Arnoldi process)를 통하여 계산되며, 다음과 같은 정규직교성(orthonormality)을 가진다. 행렬 \mathbf{I}_n 은 n 차의 단위행렬이다.

$$\begin{aligned} \text{colspan}\{\mathbf{V}\} &= \mathfrak{K}_n(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}) \\ \mathbf{V}^T \mathbf{V} &= \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (5)$$

모드중첩법은 변환행렬을 초기 시스템의 고유벡터를 사용하여 다음과 같은 축소 시스템으로 변환된다.

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \boldsymbol{\Lambda}_n \boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F}(t) \quad (6)$$

여기서 상태변수벡터 $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta}(t)$ 로 근사되며, $\boldsymbol{\Phi}$ 는 모드행렬(modal matrix)이다. 이 경우, 다음과 같은 M-정규직교성(M-orthonormality)을 갖는다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} &= \mathbf{I}_n \\ \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} &= \boldsymbol{\Lambda}_n \end{aligned} \quad (7)$$

이때 행렬 $\boldsymbol{\Lambda}_n$ 는 $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$ 를 대각요소로 갖는 대각행렬이다.

3. 적용 예제

수치예제에는 Fig. 1과 같은 고층빌딩을 고려하였다. 이 유한요소모델은 53,568개의 빔요소로 되어있으며 총 자유도는 287,232이다. 모델의 하단부는 모두 구속되었다고 가정하였고, 지진정보는 El Centro Earthquake (1940)의 데이터를 이용하였다.(Fig. 1 참조)

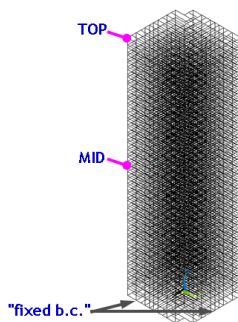


Figure 1 The FE model and El Centro earthquake

이때, 상단부와 중간지점에서의 변위를 축소기법에 따라서 축소모델의 차수 30에 대하여 서로 비교하여 그 결과를 Fig. 2에 도시하였다. Krylov-MOR에 의한 축소모델($n=30$)과 모드중첩법에 의한 축소모델($m=30$)은 초기 유한요소모델의 결과와 거의 일치하는 경향을 보인다. 이를 통하여 차수 30의 축소모델이 본 모델의 지진해석에는 공학적으로 충분한 정확도를 주는 축소모델임을 알 수 있다.

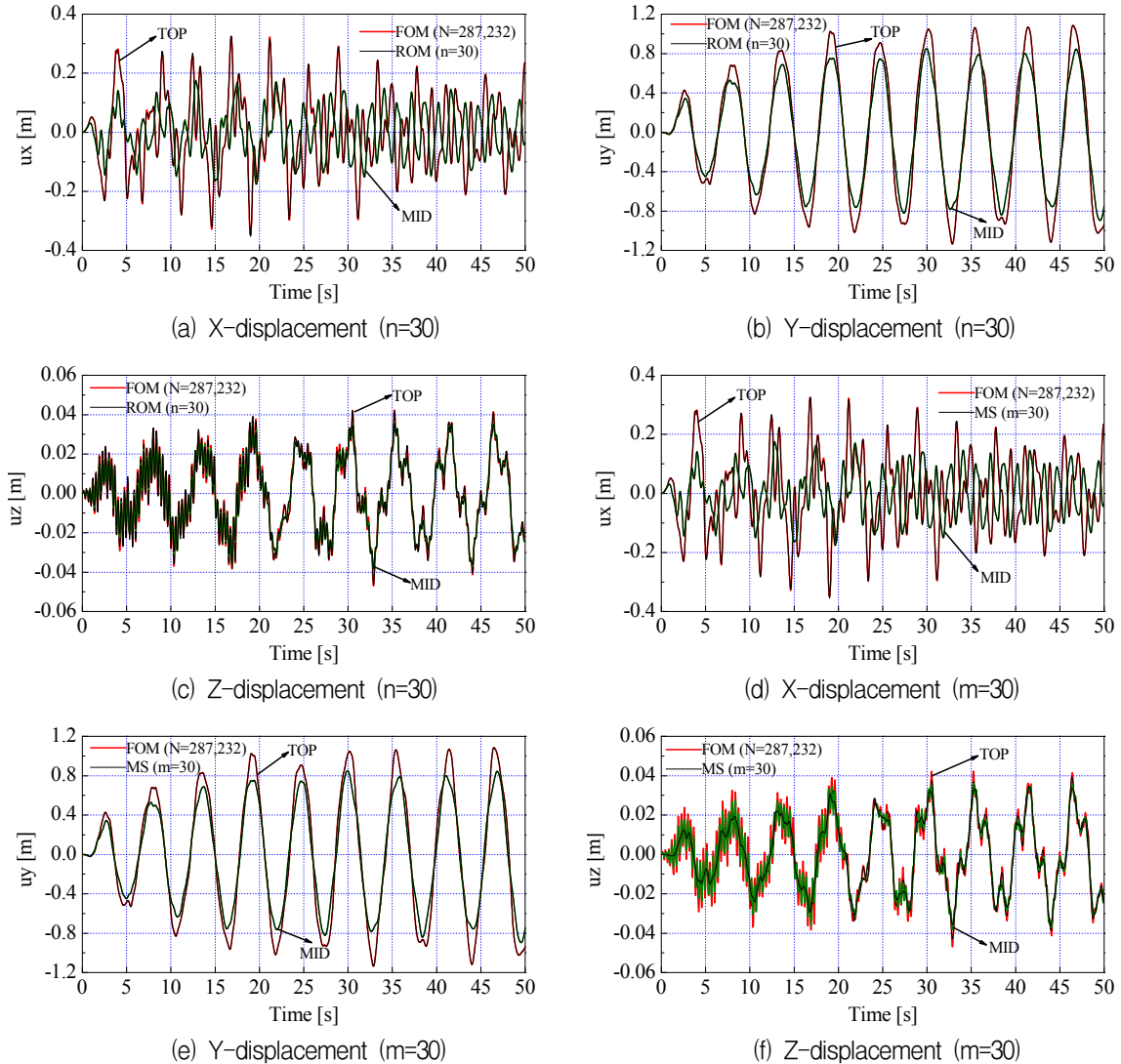


Figure 2 Comparison of the seismic responses between the full model and reduced models by the Krylov-MOR ($n=30$) and the mode superposition method ($m=30$)

두 축소기법의 정확성과 효율성을 비교하였다. Fig. 3에는 상단부에서의 변위 오차를 축소기법에 따라서 서로 비교하였다. X 및 Y방향의 변위 오차는 Krylov-MOR과 모드중첩법에 의한 축소모델에서 유사한 크기가 발생하였으나 Z방향의 경우는 Krylov-MOR에 의한 축소모델이 더 작은 변위 오차를 가짐을 확인하였다. 이는 모드중첩법의 경우, 30차까지의 고유모드에 상대적으로 Z방향으로의 거동을 잘 나타낼 수 있는 고유모드가 충분히 포함되어 있지 않기 때문인 것으로 판단된다. 표 1에서는 각 경우에 총 계산시간을 비교하였다.

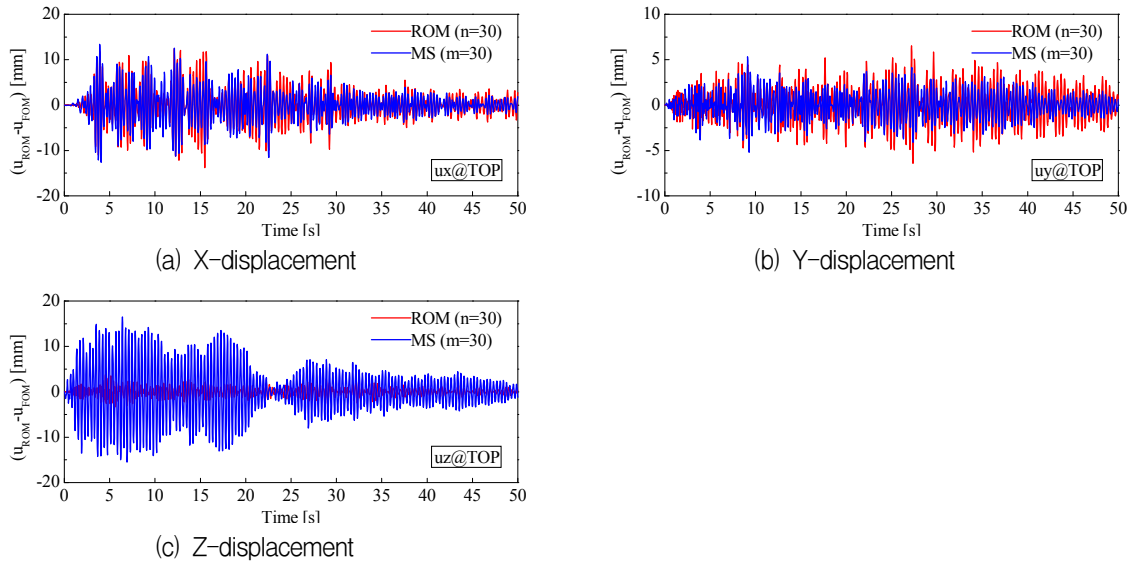


Figure 3 Comparison of the errors between the full model and reduced models by the Krylov-MOR (n=30) and the mode superposition method (m=30)

Table 1 Comparison of computational times

	Initial FE model (N=287,232)	Reduced models	
		Krylov-MOR (n=30)	MS (m=30)
축소모델 생성 (sec)	-	35	180
과도지진해석 (sec)	47,000	5	5

4. 결론

본 논문에서는 Krylov 부공간에 근거한 축소모델링기법을 이용하여 고층구조물의 지진해석을 효율적으로 수행한 결과를 제시하였다. 같은 차수의 모드중첩법과 결과를 비교하였을 때, 특정한 방향의 응답이 더 정확하였으며 모드중첩법에 비하여 계산시간 측면에서도 더 효율적임을 확인하였다.

감사의 글

이 논문은 2009학년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2009-0087705).

참고문헌

- 한정삼, 권기범, 권순재 (2010) 모델차수축소법을 이용한 과도 지진해석, **대한기계학회 2010년도 추계학술대회 강연 및 논문 초록집**, pp.741~742.
- 한정삼 (2006) 모델차수축소법을 이용한 효율적인 진동해석, **대한기계학회 논문집**, 30(3), pp.310~317.
- 한정삼 (2010) Krylov 부공간 모델차수축소법을 이용한 주파수응답함수의 직접 설계민감도 해석, **한국전산구조공학회 논문집**, 23(2), pp.153~163.