

이동최소제곱 차분법을 이용한 explicit 및 implicit 2차원 동적해석

Explicit and Implicit Dynamic Analysis Using MLS Difference scheme

김 경 환* · 이 상 호** · 윤 영 철***

Kim, Kyeong-Hwan · Lee, Sang-Ho · Yoon, Young-Cheol

요 약

본 연구에서는 이동최소제곱 차분법을 2차원 동적고체문제를 해석하기 위하여 확장시켰으며 Newmark β 방법을 통해 explicit와 implicit 시간적분법을 모두 적용하여 그 차이를 비교하였다. 이동최소제곱 차분법은 Taylor 다항식을 이용하여 미분계산을 근사화 함으로써 내부 및 경계에서도 강형식을 그대로 이용할 수 있다. 그래서 계산이 빠르고 수치적분이 필요하지 않아 무요소법의 장점을 잘 살릴 수 있고 해석차수를 손쉽게 조정할 수 있어 cubic 등의 고차 근사계산이 간편하다. 두 가지 수치예제를 통하여 동적해석에 대한 이동최소제곱 차분법의 적용성과 안정성을 검증하였다.

Keywords: 이동최소제곱 차분법, 동적해석, explicit와 implicit, Newmark β 방법, cubic

1. 서 론

일반적으로 고체 문제의 동적해석은 시간에 따른 고체의 거동을 파악하기 위하여 유한요소(FEM)를 통해 발달되어 왔다. 그러나 유한요소는 요소망에 의존적이기 때문에 time step에 따라 반복 계산이 필요한 동적 해석에서는 많은 어려움을 갖는다. 이러한 문제점을 극복하기 위해 Belytschko 등(1994)은 요소를 생성할 필요 없이 절점만으로 해석이 가능한 무요소법(Meshfree Method)을 제안하였다. 그로 인해 해석 영역 안의 요소망을 고려하지 않고 임의로 배치된 절점들만으로 수치해석이 가능하였다. 하지만 무요소법은 Galerkin 방법을 사용하기 때문에 형상함수의 미분계산이 복잡하고 여전히 수치적분이 필요하여 동적해석을 수행하기에 한계를 가지고 있었다(Gu 와 Liu, 2005). 이후에 콜로케이션 방법을 이용하여 동적해석을 수행한 예도 있지만 경계조건을 처리하기 위해서 무요소법의 효율성을 감소시키는 약형식 사용을 피할 수 없었다(Sadeghirad 등, 2009). 그 사이에 무요소법의 장점을 극대화 시킬 수 있는 이동최소제곱 차분법이 윤영철 등(2007)에 의해서 제안 되었는데, 이 방법은 유한차분법(FDM)에서 사용하는 Taylor급수를 도입하여 경계조건까지도 강형식으로 해석 할 수 있는 장점을 가지고 있다. 그래서 본 연구 방법은 계산속도가 빠를 뿐만 아니라 수치적분을 필요로 하지 않고 근사식의 차수 조정이 간편하여 진정한 의미에서 요소망에 자유롭다고 할 수 있다. 그러나 고체문제의 동적해석으로의 적용은 미비한 상태이다. 본 연구에서는 기존의 많은 단점들을 극복 할 수 있는 이동최소제곱 차분법을 이용하여 2차원 동적해석을 수행 하였다. 또한, 본 연구 방법으로 동적해석을 수행하였을 때 explicit 및 implicit의 시간적분법에 따라서 변하는 현상을 분석하였다. 더 나아가 quadratic 뿐만 아니라 cubic 함수를 이용하여 해석 값을 비교하였다.

* 학생회원 · 연세대학교 토목환경공학과 통합과정 kay@csem.yonsei.ac.kr

** 정회원 · 연세대학교 토목환경공학과 교수 lee@yonsei.ac.kr

*** 정회원 · 명지전문대학 토목과 부교수 ycyoon@mjc.ac.kr

2. 이동최소제곱법을 이용한 차분식 구성

2.1 형상함수 근사화

기존의 무요소법의 단점인 복잡한 미분 계산 및 필수경계조건 처리의 어려움을 해결하기 위하여 이동최소제곱 차분법은 유한차분법의 특징을 이용해서 형상함수를 유도한다. 즉, Taylor 급수를 이용한 미분 근사를 통해서 형상함수를 얻게 된다. 2차원의 경우 임의의 점 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ 와 $\mathbf{x} = (x, y)$ 에 대하여 폐구간 $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ 에서 m 번 미분 가능한 함수 $u(\mathbf{x})$ 의 Taylor 다항식은 식 (1)과 같다.

$$u^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \simeq u(\mathbf{x}_0) + \frac{r}{1!} \left\{ u^{[1,0]}(\mathbf{x}_0) \left(\frac{x-x_0}{r} \right) + u^{[0,1]}(\mathbf{x}_0) \left(\frac{y-y_0}{r} \right) \right\} + \dots + \frac{r}{m!} u^{[0,m]}(\mathbf{x}_0) \left(\frac{y-y_0}{r} \right)^m \quad (1)$$

$$= \mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \mathbf{a}(\mathbf{x}_0)$$

여기서, $u^{[1,0]}, u^{[0,1]}$ 는 각각 x, y 로의 편미분을 나타내고, r 은 가중함수 범위이며, $\mathbf{a}(\mathbf{x}_0)$ 는 $u(x)$ 의 편미분 항을 모아놓은 행렬이다. 식 (1)에 이동최소제곱법을 적용하여 최소화 과정을 통해 $\mathbf{a}(\mathbf{x}_0)$ 에 대한 식을 정리 할 수 있다. 기준점 \mathbf{x}_0 가 \mathbf{x} 로 무한히 가까워 질 때, $\mathbf{a}(\mathbf{x}_0)$ 는 식 (2)와 같이 표현 할 수 있다.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u^{[0,0]}(\mathbf{x}) \\ u^{[1,0]}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ u^{[0,m]}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1^{[0,0]}(\mathbf{x}) & \dots & \Phi_N^{[0,0]}(\mathbf{x}) \\ \Phi_1^{[1,0]}(\mathbf{x}) & \dots & \Phi_N^{[1,0]}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{[0,m]}(\mathbf{x}) & \dots & \Phi_N^{[0,m]}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad (2)$$

여기서, N 은 총 절점의 수를 의미한다. 이렇게 얻어진 형상 함수는 변위와의 곱을 통하여 미분 값을 근사할 수 있게 된다.

2.2 시간적분법이 적용된 운동방정식의 이산화

시간적분법은 크게 explicit와 implicit 방법이 있다. 본 논문에서는 두 가지 방법을 비교하기 위하여 하나의 식으로 두 가지 방법으로 표현 할 수 있는 Newmark β 방법을 사용하였다. Newmark β 방법의 변위와 가속도 관계식은 다음과 같다.

$$\mathbf{u}^{n+2} - 2\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n = \Delta t^2 \left[\beta \mathbf{a}^{n+2} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) \mathbf{a}^{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) \mathbf{a}^n \right] \quad (3)$$

여기서, \mathbf{u} 는 변위, \mathbf{a} 는 가속도, $n+1$ 은 time step, Δt 는 time step 사이의 간격을 나타낸다. 식 (3)에서 변수 β 와 γ 를 이용하여 explicit와 implicit 방법이 표현 된다.

고체문제의 동적해석을 위한 운동방정식(equation of motion)은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (4)$$

여기서, $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력텐서(stress tensor), \mathbf{b} 는 체적력(body force), ρ 는 밀도를 의미한다. 식 (4)에 체적력이 존재하지 않는 다고 가정하고 구성방정식과 적합방정식을 결합하면 Navier 방정식을 얻을 수 있다.

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \mathbf{a} \quad (5)$$

여기서, λ 및 μ 는 Lamé 상수이다. 2차원의 경우 형상함수를 이용하여 식 (5)를 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \sum \Phi_I^{[2,0]}(N) + \mu \sum \Phi_I^{[0,2]}(N) & (\lambda + \mu) \sum \Phi_I^{[1,1]}(N) \\ (\lambda + \mu) \sum \Phi_I^{[1,1]}(N) & \mu \sum \Phi_I^{[2,0]}(N) + (\lambda + 2\mu) \sum \Phi_I^{[0,2]}(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(I) \\ u_y(I) \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} a_x(N) \\ a_y(N) \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서, 가장 왼쪽 행렬을 [A]라고 하겠다. 식(6)의 가속도 항을 Newmark β 방법을 이용하여 변위로 치환하면 아래와 같이 정리된다.

$$\left(\sum \Phi_I^{[0,0]} - \frac{\Delta t^2 \beta}{\rho} [A] \right) \begin{bmatrix} u_x^{n+1}(I) \\ u_y^{n+1}(I) \end{bmatrix} = \frac{\Delta t^2}{\rho} [A] \left\{ \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) \begin{bmatrix} u_x^n(I) \\ u_y^n(I) \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) \begin{bmatrix} u_x^{n-1}(I) \\ u_y^{n-1}(I) \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 2u_x^n(N) - u_x^{n-1}(N) \\ 2u_y^n(N) - u_y^{n-1}(N) \end{bmatrix} \quad (7)$$

위와 같은 방법으로 자연경계조건 및 필수경계조건도 이산화 시킬 수 있으며, 세 식을 결합하여 수치해석을 위한 하나의 시스템을 구성 할 수 있다. 식(7)에서 β 에 0을 대입하면 inverse 계산이 줄어들면서 explicit 형태의 수식을 얻을 수 있다.

3. 수치 예제

3.1 캔틸레버 빔

첫 번째 예제는 그림 1과 같은 형상과 재료특성을 갖는 캔틸레버 빔으로 자유단에 외력은 포물선 행태로 작용한다(Timoshenko and Goodier 1970). 총 45개의 절점을 이용하여 계산한 자유단 중앙 점의 y방향 변위는 그림 2에 도시하였다. 같은 time step에서 explicit와 implicit 결과 값이 거의 비슷한 모습을 보였으며, 시간에 따른 그래프의 진폭이 정적해석 결과 값($2 \times u_y^{static} = 0.0178$)을 잘 따라가고 있다. 또한, implicit 상태에서 cubic 형상함수를 이용하여 얻은 결과 값을 그림 2에 선으로 표현하였다. cubic 계산에 의해 얻어진 결과 값은 훨씬 안정적인 포물선을 보여주고 있다.

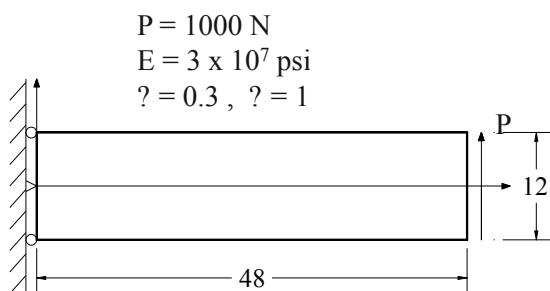


그림 1 캔틸레버 빔

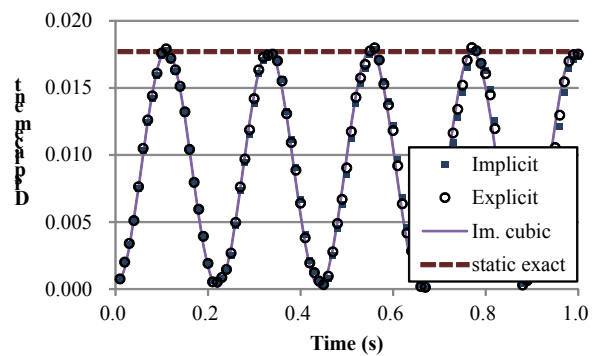


그림 2 자유단 중앙 점의 변위 변화

3.2 직사각형 조각

다음 예제는 그림 3에서 볼 수 있듯이 세면이 롤러로 고정되어 있고 등분포의 힘을 받는 직사각형 조각이다(Dominguez 1993). 위쪽 면에 작용하는 P는 시간에 따라 일정하게 작용하며 231개의 절점으로 해석하였다. 그림 4는 바닥면에서 중앙 점의 응력변화를 나타내고 있으며, 정해의 값과 explicit와 implicit 해석 값을 포함하고 있다. 위의 예제와 마찬가지로 time step이 같으면 두 방법의 결과 값이 비슷한 형상을 보였다. 그러나 time step을 10배로 늘리게 되면 explicit 방법은 stability 조건에 의하여 계산을 수행 할 수 없지만 implicit 방법은 정해와 유사한 결과 값을 얻을 수 있었다.

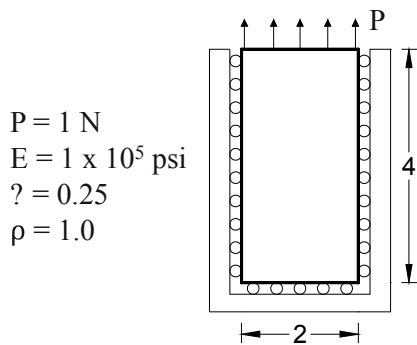


그림 3 직사각형 조각

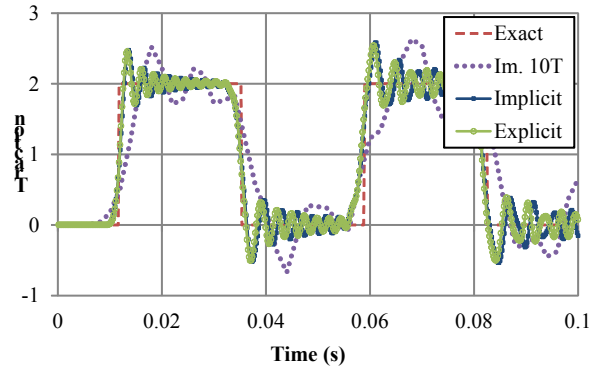


그림 4 아랫단 중앙 점의 응력 변화

4. 결론

본 연구에서는 이동최소제곱 차분법에 Newmark β 방법을 적용하여 explicit와 implicit 방법으로 고체문제의 동적거동을 해석하였다. 본 연구방법은 Talyor 다항식을 통해 얻은 형상함수를 이용하여 강형식을 직접 이산화하기 때문에, 요소망에 의존적인 기존방법들로 동적해석 수행 시 발생하는 문제점을 극복 할 수 있었으며, 더 나아가 간편하게 해석 차수를 증가 시킬 수 있었다. 그리고 두 가지 예제를 통하여 본 연구 방법의 적용성과 안정성을 확인하였으며, explicit 및 implicit 방법의 차이를 비교 할 수 있었다. explicit 방법은 수식이 간단하여 쉽고 간편하게 동적해석을 수행할 수 있지만 time step에 의존적이었다. 반면, implicit 방법은 계산 과정이 복잡하지만 time step이 크더라도 정해와 비슷한 결과 값을 보여주었다. 앞으로 심도 있는 추가 연구가 수행된다면 다양한 동적해석 분야로의 확장이 가능 할 것으로 판단된다.

감사의 글

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2010-0006050)

참고문헌

- 윤영철, 김동조, 이상호 (2007) 탄성균열해석을 위한 그리드 없는 유한차분법, **한국전산구조공학회 논문집**, 20(3), pp.321~327.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. (1994) Element-free galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.229~256.
- Sadeghirad, A., Kani, I.M., Rahimian, M. and Astanteh, A.V. (2009) A numerical approach based on the meshless collocation method in elastodynamics. *Acta Mechanica Sinica*. 25, pp.857~870.
- Gu, Y.T. and Liu, G.R. (2005) A meshfree weak-strong (MWS) form method for time dependent problems, *Computational Mechanics*, 35(2), pp.134~145.
- Timoshenko, S.P. and Goodier, I.N. (1970) Theory of Elasticity. *McGraw-Hill*. Third Edition.
- Dominguez J. (1993) Boundary Elements in Dynamics. *Computational mechanics Publications*.