

# 음향결정 구조의 레벨셋 기반 위상 및 형상 최적설계

## Level Set Based Topological Shape Optimization of Phononic Crystals

김민근\* · 조선희\*\* · 하시모토 히로시\*\*\* · 아베 카즈히사\*\*\*\*

Kim, Min-Geun · Cho, Seonho · Hashimoto, Hiroshi · Abe, Kazuhisa

### 요약

본 논문에서는 레벨셋 방법을 이용하여, 소음을 차단하기 위한 음향 구조물의 형상 최적 설계를 수행하였다. 음향 결정 구조에서는 음향이 흩어져 있는 결정 구조에 의해서 굴절되기 때문에 결정 모양을 조정함으로써, 음향 거동을 제어 할 수 있다. 형상 최적 설계의 목적은 특정한 각도와 각속도로 입사되는 입사파에 대해서 음향 투과율(acoustic transmittance)이 최소가 되도록 음향 결정의 형상(inclusion shape)을 결정하는 것이다. 음향 압력(acoustic pressure)은 주기성을 갖는 음향 결정에 대해서 헬몰츠(Helmoltz)형태의 지배 방정식을 풀어서 얻을 수 있다. 본 연구에서는 음향 구조물로 결정이 수평 방향으로는 주기적으로 무한히 분포하고 수직방향으로는 유한한 층간 구조를 가지고 있는 소음 방어벽 (Noise barrier)을 고려한다. 결정의 위치는 고정되어 있고, 결정의 형상을 설계 변수로서 음파의 거동을 제어할 수 있도록 하였다. 주기적 구조물을 고려하기 때문에 결정의 좌와 우에 Bloch 이론을 적용해 주기적 경계조건을 부과하였고, 소음 방어벽 위와 아래에는 임피던스 행렬(impedance matrix)를 이용하여, 무한 균질 영역과 소음 방어벽사이의 음파 투과를 모사하였다. 복잡한 형상 변화를 표현하기 위해 임시적 경계를 이용한 레벨셋 방법을 사용하였다. 설계 민감도 해석을 통해 목적함수가 감소하는 방향으로 경계에서의 수직 벡터를 계산하고, 이를 해밀턴-자코비(Hamilton-Jacob) 방정식에 대입하여, 최적의 형상을 나타내는 레벨셋 함수를 구하였다.

**keywords** : Bloch 이론, 음향 투과율(acoustic transmittance), 레벨셋 방법, 형상 최적 설계

## 1. 서론

주기성을 가지는 탄성과 전달 물질을 음향 결정구조(phononic crystals)라 한다. 많은 연구자들이 주기성을 가지는 음향 결정 구조에 대해서 band gap의 크기를 결정함으로써 음향 차폐(acoustic barrier) 방법을 고안하였다. 음향 차폐의 기능은 결정 구조의 형상에 따라 달라진다. Sigmund (2003)는 원하는 두 주파수 사이의 band gap이 최대가 되도록 하는 형상을 위상 최적 설계를 통해 얻었다. 하지만, 구조물의 고유치로 이루어진 목적함수인 band gap은 수학적으로 볼록성(convexity)을 갖지 않아 최적해가 보장되지 않는다. Abe (2010) 적층 구조물에 대해서 에너지 형태를 갖는 각 층간의 음향 투과율(acoustic transmittance)을 계산하여 음향 결정 구조의 거동을 해석하였다. 본 연구에서는 레벨셋 기반의 형상 최적 설계 방법(Allaire, 2004)을 이용하여 음향 투과율이 최소가 되도록 하는 음향 결정 구조의 최적 형상을 구하였다.

\* 서울대학교 조선해양공학과 박사후연구원 genha21@snu.ac.kr

\*\* 정희원 · 서울대학교 조선해양공학과 교수 secho@snu.ac.kr

\*\*\* Niigata University, Department of Civil engineering 석사과정 f10e056c@mail.cc.niigata-u.ac.jp

\*\*\*\* Niigata University, Department of Civil engineering 교수 abe@eng.niigata-u.ac.jp

## 2. 음향 투과율 해석

### 2.1. 지배 방정식

그림 1에서 나타난 주기적인 음향 결정을 갖는 적층 구조물을 고려해 보자.  $D_0$ ,  $D_1$ , 그리고  $D_2$ 은 각각 음향 결정, 하반 그리고 상반 무한 균질 물질을 나타낸다. 주어진 문제에서의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (1)$$

위의 식은 그림 1의  $S_0$  영역에 대한 식으로, 여기서  $\mathbf{u}$ 는 음향 압력이고, 주어진 주파수  $\omega$ 에 대해서  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ 이고,  $\mathbf{K}$ 과  $\mathbf{M}$ 은 Bloch 이론에 의해  $S_0$ 에 좌-우 주기 경계 조건이 부과된 강성행렬과 질량 행렬이다. 입사파  $u^I$ 를 식 (1)에서 입사 유동(flux)의 형태로 대입하기 위해서  $D_1$  영역의 임피던스 행렬  $K_{1U}$ ,  $K_{1D}$ , 그리고  $D_2$ 의 임피던스 행렬  $K_{2U}$ 을 이용하여 식 (1)을 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.

$$\hat{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} u_L \\ u_B \\ u_T \\ u_M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{LL} & \hat{K}_{LB} & \hat{K}_{LT} & \hat{K}_{LM} \\ \hat{K}_{BL} & \hat{K}_{BB} + \hat{K}_{1D} & \hat{K}_{BT} & \hat{K}_{BM} \\ \hat{K}_{TL} & \hat{K}_{TB} & \hat{K}_{TT} + \hat{K}_{2D} & \hat{K}_{TM} \\ \hat{K}_{ML} & \hat{K}_{MB} & \hat{K}_{MT} & \hat{K}_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L \\ u_B \\ u_T \\ u_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [K_{1U} + K_{1D}]\{u^I\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서 밑첨자 L, B, T, M은 각각 영역  $S_0$ 의 왼쪽 면, 아랫 면, 윗 면, 그리고 이를 제외한 나머지 영역을 뜻한다. 여기서 입사파  $u^I$ 가 주어지면, 식 (2)를 풀어서 음향 압력  $\mathbf{u}$ 을 구할 수 있다 (Abe, 2010)

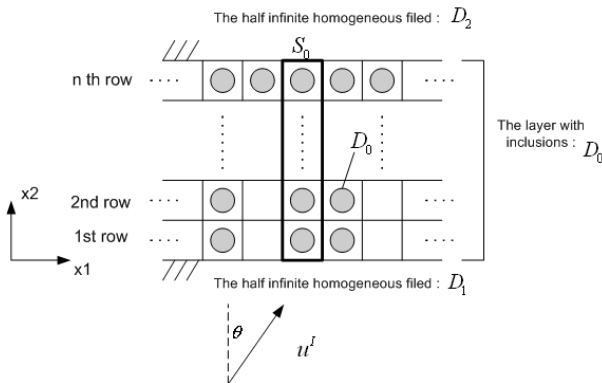


그림 1 음향 차폐 구조물

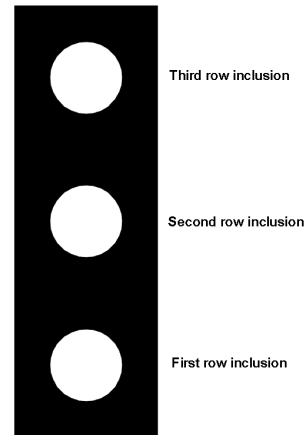


그림 2 3개의 음향 결정구조로 이루어진 적층구조물 ( $S_0$ )

### 2.2. 에너지 투과율

에너지 투과율  $E_T$ 은 에너지 입사 에너지  $E_I$ 와 투과 에너지  $E_T$ 의 비율  $E_T/E_I$ 로 표현되며, 입사에너지와 투과 에너지는 임피던스 행렬  $K_{1D}$ 와  $K_{2U}$ 을 이용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$E_I = \frac{\omega}{2} \text{Im} \left( \{\bar{u}_B\}^T [K_{1D}] \{u_B\} \right), \quad E_T = \frac{\omega}{2} \text{Im} \left( \{\bar{u}_T\}^T [K_{2U}] \{u_T\} \right) \quad (3)$$

여기서  $\bar{(\cdot)}$ 은 켈레 복소수 값을 의미한다.

### 3. 레벨셋 방법과 설계 민감도 해석

레벨셋 방법은 주어진 형상을 경계에서의 정 부호 함수(signed distance function)  $\phi(\mathbf{x})$  로 임시적인 경계를 표현하는 방법이다. 형상의 경계는 경계에서의 수직 속도  $V_n(\mathbf{x})$  주어졌을 때 다음과 같은 해밀턴-자코비 (Hamilton-Jacobi) 방정식을 풀어 얻어지는 함수  $\phi(\mathbf{x})$  을 통해 원하는 방향으로 움직일 수 있다. 레벨셋 기반의 형상 최적 설계에서는 설계 민감도 해석을 통해  $V_n(\mathbf{x})$  을 구하여 목적함수가 감소하는 방향으로 형상이 결정될 수 있도록 한다 (Allaire, 2004). 목적함수인 에너지 투과율을  $S_0$ 의 영역 적분으로 표현하면 다음과 같다.

$$L = \int_{\Omega} J(\phi) d\Omega = E_T \quad (4)$$

보조 변수 방법 (Adjoint method)을 이용하여 식 (5)의 형상 설계 변수  $\phi(\mathbf{x})$ 에 대해 변분은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial J}{\partial \phi} \varphi d\Omega = \frac{\partial E_T}{\partial \phi} \varphi = \frac{\varphi}{2E_T} \text{Im} \left( -\{\bar{\mathbf{u}}_1\}^T \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}(\phi)}{\partial \phi} \varphi \right] \{\mathbf{u}\} - \{\bar{\mathbf{u}}\}^T \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}(\phi)}{\partial \phi} \varphi \right] \{\mathbf{u}_2\} \right) \quad (5)$$

여기서  $\varphi$ 은 레벨셋 함수  $\phi(\mathbf{x})$ 의 변분량이고  $\bar{\mathbf{u}}_1^*$ 은  $\mathbf{u}_2^*$  다음에 주어지는 보조 변수 방정식을 풀어서 얻어지는 보조 변수이다. 여기서  $\mathbf{B}_T$ 을 임피던스 행렬  $K_{2D}$ 의 전체 행렬의 조립 행렬이라 할 때, 조립된 임피던스 행렬은  $[\tilde{\mathbf{K}}] = [\mathbf{B}_T]^T [K_{2D}] [\mathbf{B}_T]$  이고, 보조 변수 방정식은 다음과 같다.

$$[\tilde{\mathbf{K}}]^T \{\bar{\mathbf{u}}_1^*\} = [\tilde{\mathbf{K}}]^T \{\bar{\mathbf{u}}\}, \quad [\tilde{\mathbf{K}}]^T \{\mathbf{u}_2^*\} = [\tilde{\mathbf{K}}] \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (6)$$

목적함수가 최소가 되도록 하는 경계에서의 수직 속도  $V_n(\mathbf{x})$  은 다음과 같은 식을 통해 얻을 수 있다.

$$V_n = \varphi = -\frac{\partial J}{\partial \phi} \quad (7)$$

### 4. 수치 예제

표 1 설계 민감도 해석 결과

Angle	perturbed(a)	original(b)	FDM(a-b)	AVM(b)	(b)/(a-b)*100
0°	9.07416819E-02	9.07484381E-02	-6.75620884E-02	-6.75052273E-02	99.9158
180°	9.07416819E-02	9.07484381E-02	-6.75620884E-02	-6.75047366E-02	99.9151
90°	9.07494910E-02	9.07484381E-02	1.05298013E-02	1.05202764E-02	99.9095
270°	9.07494910E-02	9.07484381E-02	1.05298013E-02	1.05202774E-02	99.9096

그림 2과 같이 3개의 음향 결정 구조로 이루어진 모델을 고려해보자. 검은색 영역은 재료 밀도가 높은 영역으로 하얀색 영역과의 밀도 비는 5:1 이다. 표 1은 입사각  $\theta = 0^\circ$  로 입사하는 입사파가 주어지는 경우에 대해서 두 번째 열의 음향 결정 구조의 경계(원 모양의 결정 중심으로  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  위치)에서의

레벨셋 함수에 음향 투과율  $E_t$  대한 설계 민감도 해석 결과를 위한 차분법(FDM)과 비교한 결과이다. 본 연구에서 유도한 보조 변수법을 이용한 결과 (AVM)와 매우 일치함을 알 수 있다.

그림 2의 모델을 사용하여 입사파  $u^I$ 이 아래에서 입사각이  $\theta=0^\circ$ 와  $\theta=45^\circ$  일 경우 주어진 주파수에서의 에너지 투과율을 최소화 되도록 형상 최적설계를 수행하였다. 각 경우에 음향 결정의 체적 제한 조건은 각 초기 체적의 85%, 65%를 넘지 않도록 하였고,  $\theta=45^\circ$  일 경우에는 주파수가  $\omega=2.88$ ,  $\theta=0^\circ$  일 경우에는 주파수가  $\omega=0.94, 1.80, 1.88$ 에서의 에너지 투과율이 최소화 되도록 하였다. 이 경우 목적함수는 각 주파수의 에너지 투과율의 합으로 하였다. 그림 3은 최적 형상을 그림 4, 5는 입사각에 대한 목적함수를 그림 5, 6은 최적 설계 전과 후의 에너지 투과율을 비교한 결과이다.

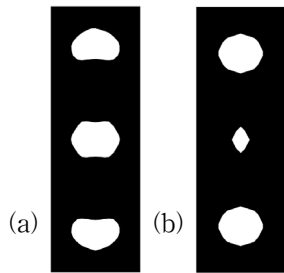


그림 3 최적 형상(a) $\theta=0^\circ$ , (b) $\theta=45^\circ$

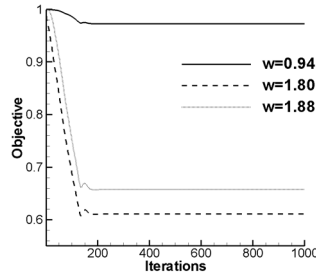


그림 4 목적함수 ( $\theta=0^\circ$ )

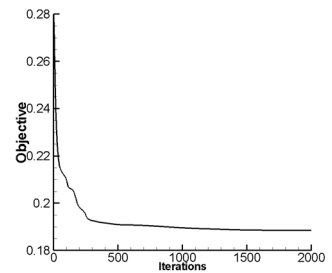


그림 5 목적함수 ( $\theta=45^\circ$ )

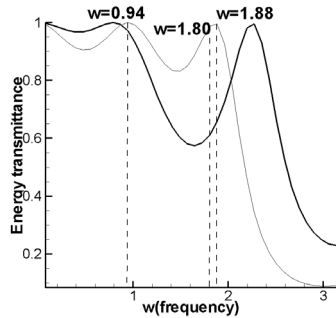


그림 5 에너지 투과율( $\theta=0^\circ$ )

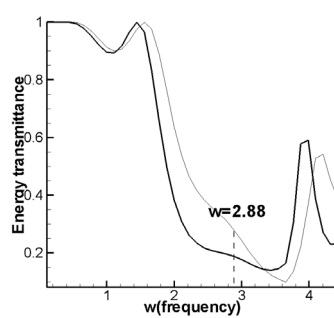


그림 6 에너지 투과율( $\theta=45^\circ$ )

### 감사의 글

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (2010-0018282).

### 참고문헌

- Sigmund, O. (2003) Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization, *Philosophical Transactions the Royal Society A*, 361, pp.1001~1019.
- Abe, K., Nakayama, Y., and Koro, K. (2010) Elastic wave propagation in periodic composite with layer, *Journal of Applied Mechanics, JSCE.*, 13, pp.1041-1048 (in Japanese).
- Allaire, G., Jouve, F., and Toader, A. M. (2004) Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, 194, pp.363~393.