

부유식 유탄성 보 모델의 수렴성 연구

Accuracy analysis of a hydroelastic model of a floating beam

김기태* · 이필승** · 박광춘***

Kim, Ki-Tae · Lee, Phill-Seung · Park, Kwang-Chun

요약

본 연구에서는 규칙 파랑 중에 있는 부유식 구조물의 유탄성 거동을 해석하고, 수치모델의 수렴성을 살펴본다. 부유식 구조물은 보로 모델링 하며, 유체는 이상유체로 가정하여 문제를 해결한다. 보 모델의 경우 Euler-Bernoulli 보 모델과 Timoshenko 보 모델로 나누어 그 특성을 비교해 본다. 문제의 해석법에 있어서 부유식 구조물의 경우는 유한요소법을, 유체의 경우는 경계요소법을 이용하여, 상호 연성된 방정식을 이끌어 낸다. 상호 연성된 방정식을 토대로 Euler-Bernoulli 보 모델과 Timoshenko 보 모델의 거동 특성을 살펴보고 제시된 수치 모델을 기준으로 수렴성을 분석해 본다.

keywords : 유탄성, 보, Green 함수, 유한요소법, 경계요소법, 수렴성

1. 서론

해양구조물의 크기가 커짐에 따라 기존의 강체해석법은 구조물의 거동의 해석에 많은 문제점을 보이고 있다. 즉 대형 부유식 구조물의 모멘트 분포, 공진 현상의 일종인 스프링잉(Springing) 현상 등에 대한 설명은 강체모델로서는 한계가 있다. 이에 유탄성 모델에 기반을 두고 많은 연구들이 수행되어 왔으며, 다양한 해석 방법들이 소개되어 왔다(Watanabe, 2004). 구조물의 경우 대부분 평판으로 모델링 하였으며, 유체는 포텐셜 유체로 가정하여 문제를 간단히 하였다. 수치모델의 해석법에는 크게 모드 중첩법과 유한요소, 경계요소법의 연성법으로 나누어져 발전해 왔다.

유탄성 해석에 대한 많은 연구들이 진행되어 왔으나 아직까지 그 연구의 깊이가 기초적인 단계에 머물러 있다. 또한 해석법에 있어서 유탄성 해석에 대한 실험치와의 비교결과는 잘 보여주고 있으나 어떠한 수치 모델이 어떻게 사용되어 그 결과 값에 대해 얼마만큼의 신뢰성을 주는가에 대한 수렴성 연구는 전무하다. 특히 수치해석법으로 얻어낸 결과에 대한 수렴성은 그 해석법의 유효성을 판별하는 중요한 특성이라고 할 수 있으므로 수치모델의 수렴성에 대한 연구는 유탄성 해석에 대한 기초적인 연구의 일환으로 반드시 행해져야 한다.

본 논문에서는 1차원 유탄성 해석 모델을 이용하여 그 거동을 해석하고 수렴성을 연구하고자 한다. 먼저 부유식 구조물과 유체를 모델링하고 각각 유한요소법과 경계요소법을 이용하여 연성된 선형 방정식을 이끌어 낸다. 그런 다음 몇 가지의 수치 모델을 기준으로 수렴성을 살펴본다.

* 학생회원 · 한국과학기술원 해양시스템공학전공 석사과정 qlsn5@kaist.ac.kr

** 정회원 · 한국과학기술원 해양시스템공학전공 부교수 phillseung@kaist.ac.kr

*** 한국과학기술원 해양시스템공학전공 WCU 초빙 교수 kcpark@kaist.edu

2. 부유식 구조물과 유체의 모델링

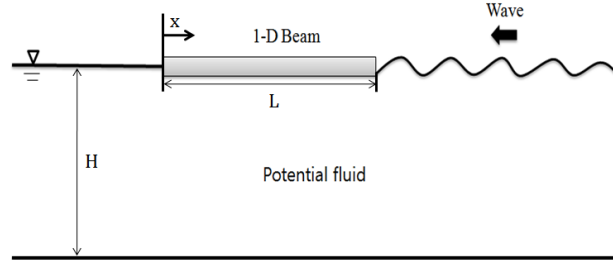


그림 1 1차원 유탄성 해석 모델

부유식 구조물은 1차원 보 모델로, 유체는 포텐셜 유체로 가정하였다. 1차원 보 모델의 경우 진단변형률의 유무에 따라 Euler-Bernoulli 보 모델과 Timoshenko 보 모델로 분류하였다. 문제의 해석에 있어서 부유식 구조물의 경우는 유한요소법, 유체의 경우는 경계요소법을 이용하였다. 또한 주파수 ω 를 가지는 입사파에 대하여 부유식 구조물이 주파수 ω 로 운동한다고 가정하였다. 입사파는 x 축의 양의 방향에서 음의 방향으로 진행한다고 가정하였다.

2.1. 부유식 구조물의 수학모델

부유식 구조물의 변분식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_0^L \left(\frac{EI}{b} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w - \rho_s t \omega^2 w \delta w - P \delta w \right) dx = 0 \quad (1)$$

$$\int_0^L \left[-\omega^2 \left(\rho_s t w \delta w + \frac{\rho_s I \theta}{b} \delta \theta \right) + \frac{EI}{b} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \kappa t G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \theta \right) - P \delta w \right] dx = 0 \quad (2)$$

식 (1) 은 Euler-Bernoulli 보 그리고 식 (2) 는 Timoshenko 보에 대한 변분식을 나타낸다. 여기에서 w 는 보의 수직방향 변위, P 는 유체의 압력, E 는 탄성계수, I 는 단면적의 중립축에 대한 2차 모멘트, b 는 보의 폭, ρ_s 는 보의 밀도, t 는 보의 길이, ω 는 각 주파수, θ 는 보의 회전 변위, κ 는 전단수정계수, 그리고 G 는 전단계수를 의미한다.

2.2. 포텐셜 유체의 수학모델

포텐셜 유체의 지배방정식인 Laplace 방정식, Bernoulli 방정식, 그리고 Green의 정리를 이용하여 유체의 변분식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_0^L \left[P \delta P + \rho_w g w \delta P - \rho_w g a e^{ikx} \delta P - \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{\omega^2}{g} P G(x, \bar{x}) d\bar{x} \delta P \right] dx = 0 \quad (3)$$

여기에서 ρ_w 는 유체의 밀도, k 는 wave number이며, 그리고 $G(x, \bar{x})$ 는 2차원 자유표면의 Green 함수이다. 유체의 압력(포텐셜)은 부유식 구조물의 질점에 맞추어 이산화 하였다. Green 함수에서 x 는 공간의

위치 그리고 \bar{x} 는 소스(source)의 위치를 의미한다.

3. 유탄성 보 모델의 수렴성

부유식 구조물과 포텐셜 유체의 변분식에 각각 유한요소법과 경계요소법을 적용하여 연성된 선형방정식을 이끌어낸 뒤 부유식 구조물의 변위와 유체의 압력을 구하였다. 그리고 유한요소의 개수를 증가시킴에 따라 나타나는 Euler-Bernoulli 보의 변위와 보의 변형 에너지 값을 참조 모델(192개의 유한요소)의 변형 에너지 값에 대비하여 그림 2 와 표 2 에 나타내었다. 변형 에너지의 경우 한 주기를 기준으로 평균을 취한 값이다. 여기에서 변수의 값은 $EI/L^4 b \rho_w g = 2.126 \times 10^{-3}$, $H/L = 0.11$, 그리고 $\omega^2 L/g = 20.53$ 으로 하였고, H 는 물의 깊이 그리고 a 는 파의 진폭을 의미한다.

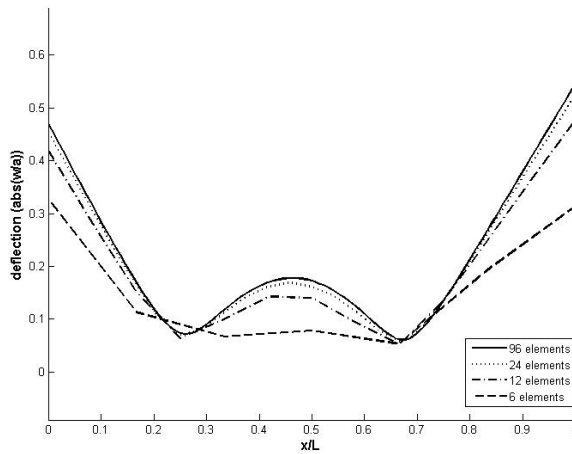


표 2 참조 모델(192개의 유한요소) 대비 보의 변형 에너지

유한요소의 개수	$\frac{E_s}{E_{ref}}$
96	0.996
24	0.932
12	0.793
6	0.475

그림 2 Euler-Bernoulli 보의 변위

유한요소의 개수를 증가시킴에 따라 보의 변위가 특정한 값에, E_s/E_{ref} 의 값이 1 에 수렴해 간다. 여기에서 E_s 는 보의 변형 에너지를 E_{ref} 는 참조 모델(192개의 유한요소)의 변형 에너지를 의미한다.

유한요소모델의 수렴성을 표 3 과 같은 수치 모델을 기준으로 그림 3 에 나타내었다. 여기에서 $\gamma t G/L^2 \rho_w g = 1$ 이고 나머지 변수의 값은 그림 2 에서의 값과 똑같이 두었으며, h 는 절점간의 간격을 의미한다.

표 3 유한요소의 모델

보 모델	변위	압력
Euler-Bernoulli 보	Hermitian 모델	2 절점 모델
Timoshenko 보		2 절점 모델
		3 절점 모델
		4 절점 모델

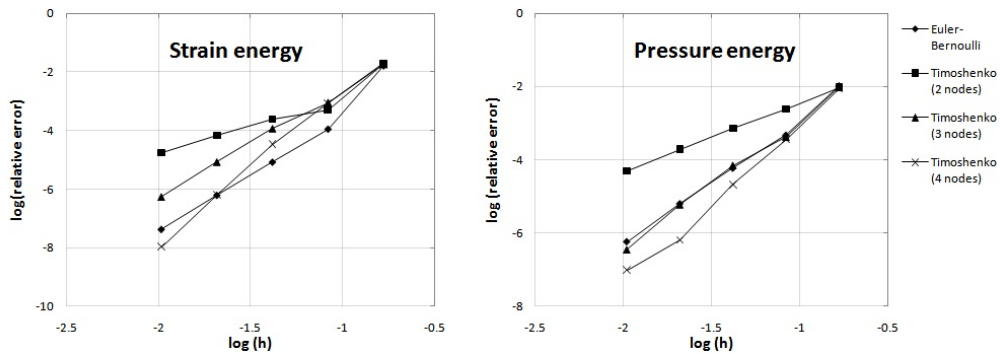


그림 3 유탄성 보 모델의 수렴성

상대오차를 계산하기 위한 참조 모델은 Euler-Bernoulli 보 모델의 경우는 192개의 유한요소를 사용한 모델이며, Timoshenko 보 모델의 경우는 128개의 유한요소를 사용한 4 절점 모델이다. 각 에너지는 한 주기를 기준으로 평균을 취하여 구하였다. 여기에서 pressure energy의 경우는 유체의 압력이 보에 한 일로 정의 된다. 수렴성의 연구를 위해서는 각 항의 정확한 계산이 요구가 되는데 Green 함수가 포함된 항에서는 기존의 Gaussian quadrature의 수치적분법으로는 상당히 큰 오차를 수반한다. 이에 Romberg 법을 이용하여 이 부분의 계산을 더욱더 정확하게 하였다.

두 모델 모두 h 가 작을수록 상대오차가 작으며 Timoshenko 보 모델의 경우, 4 절점 모델의 수렴성이 가장 좋게 나왔다. 각 변수를 변화시켜가며 그 수렴성을 비교해 보아도 큰 양상은 다르지 않으나 파의 주파수를 변화시킬 경우, h 가 파의 파장의 약 $1/12$ 보다 작아야 신뢰성 있는 값을 얻을 수가 있었다.

3. 결론

본 연구에서는 1차원 유탄성 해석 모델(Euler-Bernoulli 보와 Timoshenko 보)의 수렴성을 살펴보았다. 유한요소의 개수를 증가시킬수록 상대오차가 작았으며, Timoshenko 보의 경우 4 절점 모델의 수렴성이 가장 뛰어났다. 하지만 본 연구에 사용된 Green 함수(Taylor, 2007; John, 1950)의 경우는 소스 포인트와 관찰 포인트가 서로 같을 때 발생하는 특이점 현상(singularity)을 제대로 표현하지 못하는 형태이기 때문에 보다 더 정확한 수렴성 연구를 위해서는 다른 형태의 Green 함수(John, 1950)가 필요하다. 또한 이러한 특이점 현상(singularity)을 적분하는 특별한 방법이 요구된다.

참고문헌

Wehausen J.V. and Laitone E.V. (1960) Surface waves, *Encyclopedia of Physics*, Vol 9, pp.446-778,
 John F. (1950) On the motion of floating bodies II, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol 3, pp.45-101.
 Bathe K.J. (1996) *Finite element procedures*, Prentice Hall.
 Watanabe E., Utsunomiya T. and Wang C. (2004) Hydroelastic analysis of pontoon-type vlfs: a literature survey, *Engineering Structures*, Vol. 26, pp.245-256.
 Taylor R.E. (2007) Hydroelastic analysis of plates and some approximations, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 58, pp.267-278.