

# 장대 현수교 주케이블 선형 계산에 관한 기초적 연구

## Fundamental Study on Main Cable Geometry of Long-Span Suspension Bridge

서주원\* · 김기남\*\* · 김규왕\*\*\* · 이원표\*\*\*\*

Seo, Ju-Won · Kim, Gi-Nam · Kim, Kyu-Wang · Lee, Won-Pyo · Cho, Nam-So · Lee, Jung-Han · Kim, Ho-Kyung

### 요약

본 연구에서는 장대 현수교 주케이블의 가설시 선형관리를 위한 기초적 연구를 수행하였다. 우선, 포물선 요소 및 탄성현수선 요소의 정식화 과정을 검토하고, 각 요소의 적용에 따른 현수교 주케이블 완성계 및 가설계의 형상, 장력, 무응력장 등을 비교검토 하였다. 또한, 탄성현수선의 적용시 주케이블 가설계의 setback량 산정 방법을 제시하였으며, 이에 따른 산정 결과를 유한요소해석 결과와 비교검토 하였다. 최종적으로, 주케이블 가설계의 중앙경간 새그량 변화에 따른 탐정 새들부에서의 미끌림 안정성에 대한 민감도 해석을 수행할 예정이다.

**keywords** : 장대 현수교, 주케이블, 형상, 장력, setback량, 민감도 해석

### 1. 서론

현수교 주케이블의 시공을 위한 형상관리를 위하여, 케이블의 장력과 목표형상 좌표의 설정을 위한 해석이 요구된다. 그런데 케이블은 구조부재의 특성상 기하학적 비선형 거동특성으로 인하여 케이블에 장력이 도입되기 전에는 기하강성(geometric stiffness)이 존재하지 않기 때문에 무응력 상태에서의 형상을 정의할 수 없다. 따라서 케이블의 형상과 도입되는 장력을 구하기 위해서는 케이블의 재료특성, 지지점 조건 및 단면특성을 기초로 케이블에 도입되는 장력과 형상을 구하는 특별한 초기평형해석(Initial equilibrium analysis) 기법이 필요하다. 이러한 해석기법에는 시산법(Trial and error method), 순차적 반복 계산법(Successive iteration method) 및 TCUD법(Target Configuration Under Deadload method) 등이 있다. TCUD법은 케이블의 목표형상을 기하학적 구속조건으로 비선형 방정식의 해를 구하는 해석기법으로 케이블 구조물의 평형 상태에서의 형상과 장력을 구하는 방법으로 수렴성과 수렴속도가 뛰어난 방법이다.

본 연구에서는 PPWS(Prefabricated Parallel Wire Strand)를 적용한 주케이블 구조물의 시공을 위하여 최

\* 정회원, 공학박사, 현대건설 R&D Center 부장 [jwseo@hdec.co.kr](mailto:jwseo@hdec.co.kr)  
\*\* 공학박사, 현대건설 R&D Center 과장 [gnkim@hdec.co.kr](mailto:gnkim@hdec.co.kr)  
\*\*\* 공학석사, 현대건설 R&D Center 과장 [elsun@hdec.co.kr](mailto:elsun@hdec.co.kr)  
\*\*\*\* 공학박사, 현대건설 R&D Center 부장 [wplee@hdec.co.kr](mailto:wplee@hdec.co.kr)

중 케이블 형상의 해석과 시공중 요구되는 Setback량 산정을 위하여 TCUD법을 적용한 케이블의 기하학적 비선형 해석을 현장에서 적용하기 용이한 해석sheet 형식으로 개발하여 적용성을 검토해 보았다.

## 2. TCUD 방법에 기초한 탄성현수선 정식화

### 2.1 탄성현수선 요소의 정식화

두 고정점을 연결한 케이블의 3차원 형상을 아래의 식(1)과 같이 고정점의 3차원 케이블 장력 성분의 함수로 나타낼 수 있다. 또한, 장력의 증분에 따른 케이블 좌표의 함수를 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$l_x = f(F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}), l_y = g(F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}), l_z = h(F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}) \quad (1)$$

$$\Delta l_x = \frac{\partial f}{\partial F_{ix}} \Delta F_{ix} + \frac{\partial f}{\partial F_{iy}} \Delta F_{iy} + \frac{\partial f}{\partial F_{iz}} \Delta F_{iz} \quad (2.1)$$

$$\Delta l_y = \frac{\partial g}{\partial F_{ix}} \Delta F_{ix} + \frac{\partial g}{\partial F_{iy}} \Delta F_{iy} + \frac{\partial g}{\partial F_{iz}} \Delta F_{iz} \quad (2.2)$$

$$\Delta l_z = \frac{\partial h}{\partial F_{ix}} \Delta F_{ix} + \frac{\partial h}{\partial F_{iy}} \Delta F_{iy} + \frac{\partial h}{\partial F_{iz}} \Delta F_{iz} \quad (2.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta l_x \\ \Delta l_y \\ \Delta l_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta F_{ix} \\ \Delta F_{iy} \\ \Delta F_{iz} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$f_{11} = \frac{\partial f}{\partial F_{ix}} = \frac{l_x}{F_{ix}} - \frac{F_{ix}^2}{w} \left\{ \frac{1}{T_j(T_j + F_{jy})} - \frac{1}{T_i(T_i - F_{iy})} \right\} \quad (4.1)$$

$$f_{12}(= f_{21}) = \frac{\partial f}{\partial F_{iy}} = \frac{F_{ix}}{w} \left( \frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_i} \right) \quad (4.2)$$

$$f_{13}(= f_{31}) = \frac{\partial f}{\partial F_{iz}} = - \frac{F_{ix} F_{iz}}{w} \left\{ \frac{1}{T_j(T_j + F_{jy})} - \frac{1}{T_i(T_i - F_{iy})} \right\} \quad (4.3)$$

$$f_{22} = \frac{\partial g}{\partial F_{iy}} = - \frac{l_o}{EA_o} - \frac{1}{w} \left( \frac{F_{jy}}{T_j} + \frac{F_{iy}}{T_i} \right) \quad (4.4)$$

$$f_{23}(= f_{32}) = \frac{\partial g}{\partial l_o} = \frac{F_{iz}}{w} \left( \frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_i} \right) \quad (4.5)$$

$$f_{33} = \frac{\partial h}{\partial F_{iz}} = \frac{l_z}{F_{iz}} - \frac{F_{iz}^2}{w} \left\{ \frac{1}{T_j(T_j + F_{jy})} - \frac{1}{T_i(T_i - F_{iy})} \right\} \quad (4.6)$$

### 2.2 2차원 탄성현수선 요소

일반적인 현수교의 주케이블은 자정식 현수교등과 달리 2차원 평면상의 분포를 가지며, 완성계에서의 주요 케이블 정착점인 주탑부, 새들부 및 앵커리지에서의 평형조건을 고려하여 일반적인 강성행렬을 가진 행렬식으로 나타낼 수 있다.

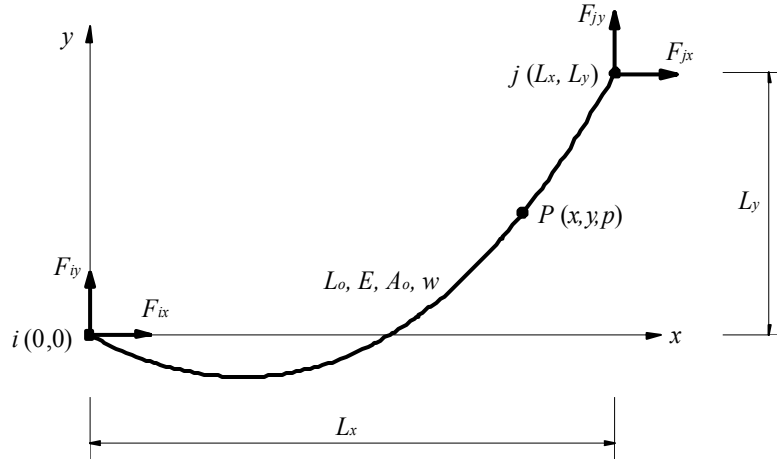


그림 1 케이블 자중을 고려한 2차원 탄성현수선 요소 좌표계

그림 1과 같은 두 고정점에 연결된 케이블의 형상을 2차원 좌표계로 나타내면, 다음 식과 같이 케이블 길이와 케이블 양단 지점의 장력의 비선형 관계식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$l_x = -F_{ix} \left[ \frac{l_0}{EA_o} + \frac{1}{w} \ln \left\{ \frac{\sqrt{F_{ix}^2 + (wl_0 - F_{iy})^2} + (wl_0 - F_{iy})}{\sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2} - F_{iy}} \right\} \right] \quad (5.1)$$

$$l_y = \frac{wl_0^2}{2EA_o} - \frac{F_{iy}l_0}{EA_o} + \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{F_{ix}^2 + (wl_0 - F_{iy})^2} - \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2} \right\} \quad (5.2)$$

⇓

$$f(F_{ix}, F_{iy}) = -F_{ix} \left[ \frac{l_0}{EA_o} + \frac{1}{w} \ln \left\{ \frac{\sqrt{F_{ix}^2 + (wl_0 - F_{iy})^2} + (wl_0 - F_{iy})}{\sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2} - F_{iy}} \right\} \right] - l_x = 0 \quad (6.1)$$

$$g(F_{ix}, F_{iy}) = \frac{wl_0^2}{2EA_o} - \frac{F_{iy}l_0}{EA_o} + \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{F_{ix}^2 + (wl_0 - F_{iy})^2} - \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2} \right\} - l_y = 0 \quad (6.2)$$

⇓

$$\begin{Bmatrix} (F_{ix})_{p+1} \\ (F_{iy})_{p+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (F_{ix})_p \\ (F_{iy})_p \end{Bmatrix} - [J_p]^{-1} \begin{Bmatrix} f((F_{ix})_p, (F_{iy})_p) \\ g((F_{ix})_p, (F_{iy})_p) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

위와 같은 탄성현수선 요소의 해를 구하기 위해서는 반복적인 비선형 해석방법을 적용하여 평형상태의 해를 구하게 된다. 3차원 케이블과 마찬가지로 평형상태에서의 단위길이 증가에 따른 장력의 관계는 다음식 (8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta l_x \\ \Delta l_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta F_{ix} \\ \Delta F_{iy} \\ \Delta l_o \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$f_{11} = \frac{\partial f}{\partial F_{ix}} = \frac{l_x}{F_{ix}} - \frac{F_{ix}^2}{w} \left\{ \frac{1}{T_j(T_j + F_{jy})} - \frac{1}{T_i(T_i - F_{iy})} \right\} \quad (8.1)$$

$$f_{12} = \frac{\partial f}{\partial F_{iy}} = f_{21} = \frac{F_{ix}}{w} \left( \frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_i} \right) \quad (8.2)$$

$$f_{13} = \frac{\partial f}{\partial l_o} = -F_{ix} \left( \frac{1}{EA_o} + \frac{1}{T_j} \right) \quad (8.3)$$

$$f_{22} = \frac{\partial g}{\partial F_{iy}} = -\frac{l_o}{EA_o} - \frac{1}{w} \left( \frac{F_{jy}}{T_j} + \frac{F_{iy}}{T_i} \right) \quad (8.4)$$

$$f_{23} = \frac{\partial g}{\partial l_o} = F_{jy} \left( \frac{1}{EA_o} + \frac{1}{T_j} \right) \quad (8.5)$$

케이블의 자중만을 고려하고 양단 지점에서의 수평장력의 평형상태 등을 고려하고, 평형상태에서 케이블 길이 증가와 장력증분의 선형관계를 가정하면 식 (9.1)~(9.3)과 같은 관계로 나타낼 수 있다.

$$F_{jy} = w l_o - F_{iy}, \quad F_{jx} = -F_{ix} \quad (9.1)$$

$$\Delta F_{jy} = w \Delta l_o - \Delta F_{iy}, \quad \Delta F_{jx} = -\Delta F_{ix} \quad (9.2)$$

$$\Delta l_x = \Delta x_j - \Delta x_i, \quad \Delta l_y = \Delta y_j - \Delta y_i \quad (9.3)$$

식 (9.1)~(9.3)을 식(8.1)~(8.5)에 적용하고 2차원 좌표계에서 각 지점의 장력과 변위의 증분에 대한 식으로 나타내면 다음 식(8)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{ix} \\ \Delta F_{iy} \\ \Delta F_{jx} \\ \Delta F_{jy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{11} & -k_{12} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ -k_{21} & -k_{22} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{11} & k_{12} & -k_{11} & -k_{12} & -k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & -k_{21} & -k_{22} & (w - k_{23}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta l_o \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$k_{11} = \frac{f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \quad (11.1)$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{-f_{12}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \quad (11.2)$$

$$k_{13} = \frac{f_{12}f_{23} - f_{13}f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \quad (11.3)$$

$$k_{22} = \frac{f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \quad (11.4)$$

$$k_{23} = \frac{f_{13}f_{21} - f_{11}f_{23}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \quad (11.5)$$

### 3. TCUD법을 적용한 케이블의 초기평형해석

위의 식에서와 같이 TCUD법은 케이블의 무응력장 길이를 변수로 함으로써 추가적인 절점변위를 구속조건으로 이용하여 평형해석을 통해 해를 구한다. 양단 절점좌표와 무응력장 길이를 변수로하는 탄성현수선 요소의 비선형 평형방정식의 증분식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta F_c^e = K_c^e \Delta x^e + K_g^e \Delta l_o^e \quad (12)$$

식 (12)는  $e$  번째 케이블 요소의 케이블 장력의 증분( $\Delta F_c$ )과 케이블 좌표의 증분( $\Delta x$ ) 및 무응력장 길이 ( $\Delta l_0$ )에 대한 관계를 나타낸다. 여기서  $K_c$ 는 케이블의 강성행렬(Global stiffness matrix)을 나타내고,  $K_g$ 는 무응력장 길이의 변화에 대응하는 탄성현수선 요소의 강성행렬을 의미한다. 위와 같이 TCUD법을 적용하여 케이블의 비선형 해석을 수행하는 알고리즘은 다음 표 1.과 같이 나타낼 수 있다.

표 1. TCUD법을 적용한 케이블 해석 알고리즘

- |   |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>① 절점, 요소, IP 계획</li> <li>② 각 요소별 flexibility coefficients matrix 시산<br/>→ using elastic catenary equation under dead load<br/>→ 요소별 i, j node의 절점력 및 무응력장 계산</li> <li>③ Global Stiffness Matrix 구성</li> <li>④ Control Points 설정</li> <li>⑤ Matrix Assemblage for Control Points</li> <li>⑥ Solving the equation of <math>F = K\Delta x</math> for <u>External Loads</u></li> <li>⑦ Updating the coordinates and unstressed lengths (<math>\Delta x</math>, <math>\Delta l</math>)</li> <li>⑧ 각 요소별 flexibility coefficients matrix updating<br/>→ using elastic catenary equation under dead load<br/>→ 요소별 i, j node의 절점력 및 무응력장 updating</li> <li>⑩ Global Stiffness Matrix updating</li> <li>⑫ Matrix Assemblage for Control Points</li> <li>⑬ Unbalanced Internal Nodal Loads 산정</li> <li>⑭ Solving the equation of <math>F = K\Delta x</math> for unbalanced internal nodal loads</li> <li>⑮ Updating the coordinates and unstressed lengths (<math>\Delta x</math>, <math>\Delta l</math>)<br/><math>\Delta x</math> 및 <math>\Delta l</math>가 수렴될때까지 iterative calculation.</li> </ol> |
|---|

### 4. 주케이블 가설을 위한 완성계 형상해석

본 연구에서 검토된 해석방법을 울산대교 주케이블의 완성계 초기형상 산정에 적용하기 위하여 중앙경간 1000m, 측경간 300m급 단경간 현수교 모델에 대한 완성계 케이블 형상해석을 수행했으며, 울산대교의 해석결과를 유한요소해석결과와 비교하였다.

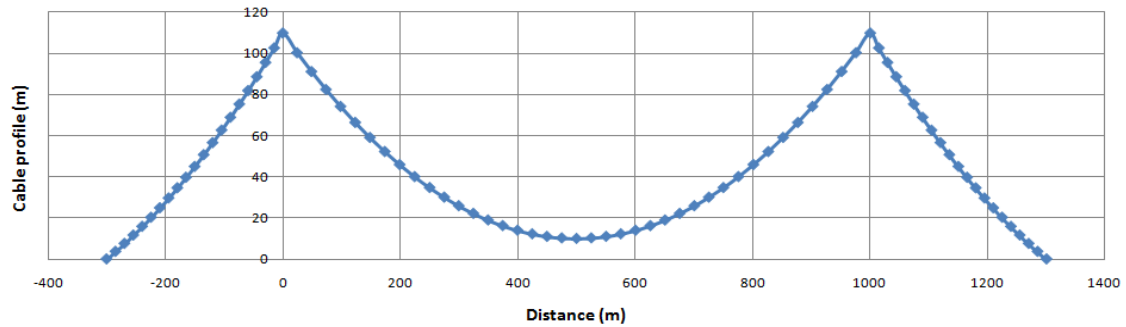


그림 2 1000m급 단경간 현수교 주케이블의 완성계 케이블형상 해석결과

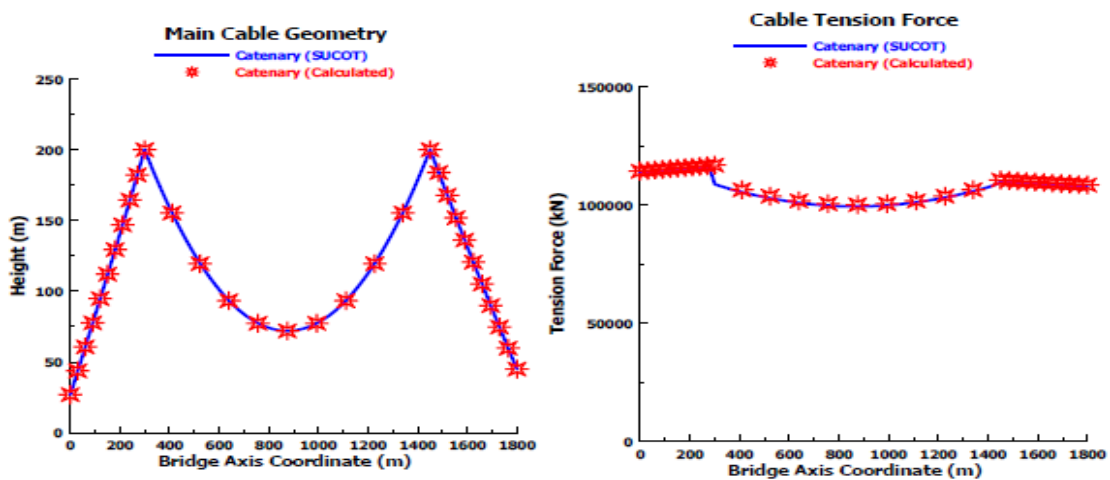


그림 3 울산대교 주케이블 완성계 형상해석 및 장력산정 결과비교

## 5. 결론

본 연구에서는 장대 현수교 주케이블의 가설시 선형관리를 위한 케이블 해석기법을 TCUD법에 기초하여 현장에서 적용이 용이한 해석루틴을 개발하였다. 특히, PPWS를 적용한 주케이블 구조물의 시공을 위하여 최종 케이블 형상의 해석과 시공중 요구되는 Setback량 산정을 위하여 TCUD법을 적용한 케이블의 기하학적 비선형 해석을 현장에서 적용하기 용이한 해석sheet 형식으로 개발하여 적용성을 검토해 보았다. TCUD법에 기초한 탄성현수선 케이블의 해석을 위한 알고리즘을 제시하였으며, 이를 이용하여 울산대교 주케이블의 초기형상 해석에 적용하였다. 최종적으로, 주케이블 가설계의 중앙경간 새그량 변화에 따른 탐정 새들부에서 미끌림 안정성에 대한 민감도 해석을 수행할 예정이다.

## 감사의 글

본 연구는 국토해양부 건설기술혁신사업 초장대교량사업단 제 3핵심과제의 연구비지원(과제번호: 08기술혁신E01)에 의하여 수행되었습니다. 연구비 지원에 감사드립니다.

## 참고문헌

조경식, 김종화, 안남규 (2006)TCUD법을 이용한 현수교 해석프로그램의 개발, 한국강구조학회 학술논문집