

온도와 물성의 불확실성을 고려한 고무의 복소계수 변동성 평가

Estimation of Variability for Complex Modulus of Rubber Considering Temperature and Material Uncertainties

이 두 호* · 황 인 성**

Lee, Dooho · Hwang, In-Sung

요 약

본 논문에서는 통계적인 방법을 이용하여 점탄성 제진재인 합성고무의 물성에 대한 변동성을 평가하는 방법을 제안하고 측정데이터를 이용하여 합성고무에 대한 평가를 수행하였다. 고무 물성의 불확실성 인자로는 외기 온도의 변화와 실험 데이터의 오차 및 점탄성 제진모델의 오차를 고려하였다. 고무는 분수차 미분 모델로 표현되었고 온도의 영향은 비선형 이동계수모델을 도입하여 복소계수로 나타내어 동강성과 감쇠를 표현하였다. 이러한 물성모델을 바탕으로 고무에 대한 물성 실험데이터와 물성계수의 확률밀도함수 사이에 정의된 우도함수를 최대화하는 통계적 보정방법을 이용하여 물성모델의 물질계수들에 대한 변동성을 추정하였다.

keywords : Rubber Mount, Material Uncertainty, Variability Analysis, Statistical Calibration Method

1. 서 론

외부의 가진으로부터 구조물의 진동을 저감하기 위하여 고무재질의 마운트를 사용하여 전달되는 진동의 전달률을 줄이거나 감쇠시키고 있다. 고무는 점탄성 물질로 기술될 수 있으며 그 성분의 조성변화에 따라서 다양한 응답특성을 보이며, 또한 외부온도의 영향을 크게 받는다. 고무 마운트의 정확한 특성을 기술하기 위해서는 통계적인 방법으로 고무의 물성에 대한 변동성의 범위를 예측해야한다. 고무재질의 통계적인 물성변화를 기술할 수 있으면 이를 바탕으로 제작된 고무 마운트의 감쇠 특성을 정확히 예측할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 점탄성 제진재료 구조물의 제진 마운트로 주로 쓰이는 합성고무에 대하여 외기 온도 및 물성의 불확실성을 고려했을 때 감쇠의 변동성을 평가하는 방법을 제안하고 실제 합성고무 실험데이터를 기반으로 고무의 감쇠 변동성을 추정한다.

2. 고무의 거동 모델

2.1. 분수차 미분모델

복소계수(complex modulus) 개념을 이용하면 점탄성 물질인 고무는 다음과 같이 주파수 영역에서 응력-변형률 관계를 기술할 수 있다.

* 정회원 · 동의대학교 기계공학과 교수 dooho@deu.ac.kr

** 학생회원 · 동의대학교 기계공학과 석사과정

$$\sigma = E^* \epsilon = E(1 + i\eta)\epsilon \quad (1)$$

위 식에서 $i = \sqrt{-1}$, σ 와 ϵ 는 응력과 변형율의 푸리에 변환이다. E, η 는 각각 저장계수와 손실계수를 의미하고 상첨자 *는 복소수를 의미한다. 식(1)의 복소계수를 나타내는 여러 점탄성 물질 모델 중 4변수 분수차 미분모델(fractional derivative model)을 이용하면 다음과 같이 복소계수를 표현할 수 있다.

$$E^* = \frac{a_0 + a_1(i f)^\beta}{1 + c_1(i f)^\beta} \quad (2)$$

위 식에서 a_0, a_1, c_1, β 는 고무의 재료 상수이며 f 는 주파수를 의미한다.

2.2. 이동계수 모델

고무의 물성에 미치는 온도의 영향은 점탄성 물질의 온도-주파수 중첩원리를 이용하면 기술할 수 있다. 이 원리를 이용하면 온도(T)의 영향은 주파수의 이동으로 표현할 수 있고 이 이동량은 온도만의 함수인 이동계수(shift factor) $\alpha(T)$ 로 표현된다. 대부분의 점탄성 물질에서 이동계수의 로그 값은 $1/T$ 에 선형적으로 비례하는 것으로 묘사할 수 있으나 고무와 같은 물질은 대부분 다음의 Williams-Landel-Ferry(WLF) 관계식으로 기술하는 것이 유리하다.

$$\log[\alpha(T)] = -d_1 \frac{(T - T_0)}{(d_2 + T - T_0)} \quad (3)$$

위 식에서 d_1, d_2 는 물질계수이며 T_0 는 기준온도이다.

3. 통계적 교정법에 의한 변동성 평가

3.1. 변동성 평가 모델

분수차 미분 모델과 WLF 모델로 표현되는 고무 물성의 변화를 평가하기 위해서 복소계수의 변동성 양을 다음과 같이 두 개의 항으로 나눌 수 있다고 가정한다.

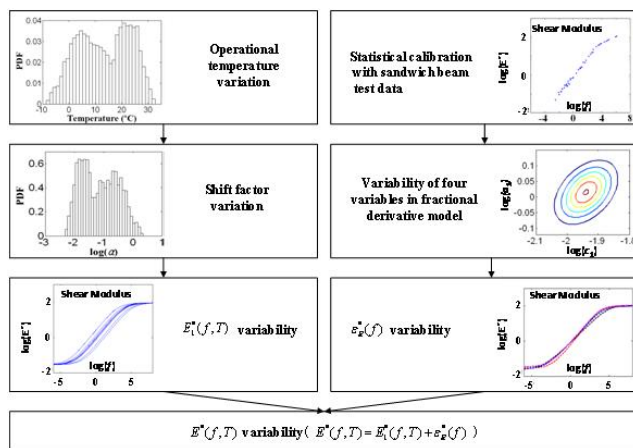


그림 1 고무의 물성의 변동성 평가 절차

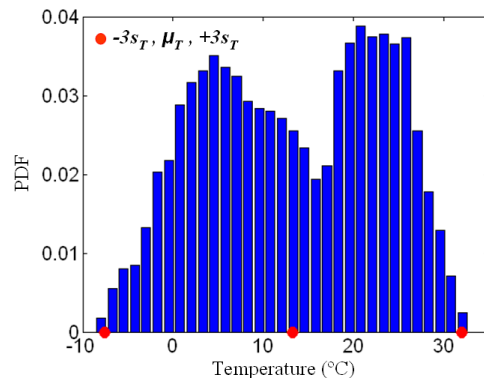


그림 2 온도 히스토그램 (2007년 서울)

$$E^*(f, T) = E_1^*(f, T) + e_1^*(f) \quad (4)$$

위 식에서 $E_1^*(f, T)$ 는 온도변동성에 따른 복소계수의 무작위 변동양이고 $e_1^*(f)$ 는 기준온도에서 복소계수의 평균값과 실 제값의 차이로 정의되고 분수차 미분모델과 모델오차와 실험데이터의 오차를 모두 포함하고 있다. 이와 같이 복소계수의 불확실성을 정의하면 [그림 1]에 나타낸 것과 같은 절차를 통하여 고무 물성의 변동성을 추정할 수 있다. 그림에서 나타냈듯이 외기의 온도 확률분포를 알 수 있으면 WLF 관계식으로부터 이동계수의 확률분포를 추정할 수 있어 $E_1^*(f, T)$ 의 변동 양을 추정할 수 있다. 또한, 기준온도에서의 저장계수 및 손실계수의 실험데이터로부터 분수차 미분모델의 물성계수에 대한 확률 분포를 추정할 수 있다.

3.2. 통계적 교정법(Statistical Calibration Method)

분수차 미분 모델의 물성계수의 변동성을 평가하기 위해서 본 연구에서는 통계적 보정법을 이용한다. 통계적 보정법은 실험데이터와 분수차 미분모델의 물성 확률분포 사이의 우도함수(likelihood function) L 을 최대화 하도록 물성계수의 통계량을 간접적으로 추정하는 방법이다. 통계적 보정법은 다음과 같은 최적화 문제로 정식화 될 수 있다.

$$\text{maximize } L(\theta|y) = \sum_{i=1}^q [\log_{10}(p(y_i|\theta))] \quad (5)$$

위 식에서 q 는 실험데이터의 개수이고 p 는 확률밀도함수이다. y 는 실험값이며 θ 는 미지의 물성계수에 대한 통계양이다.

4. 합성고무에 대한 변동성 평가

합성고무 중의 하나인 SBR(Styrene-Butadiene Rubber)은 타이어나 방진고무 마운트에 많이 쓰이는 점탄성 물질이다. 본 연구에서는 설명한 변동성 추정기법을 SBR에 적용하여 감쇠특성의 변동범위를 추정한다. 먼저 외기 온도의 변화데이터는 2007년 서울의 기온분포를 이용하여 [그림 2]와 같은 히스토그램을 사용하였다. SBR에 대한 저장계수 및 손실계수의 실험 데이터는 참고문헌[Jones(2001)]의 실험값을 이용하였다. 또 분수차 미분모델의 물성계수가 불확실성으로 발생하는 저장계수 또는 손실계수의 확률분포는 고유벡터 차원

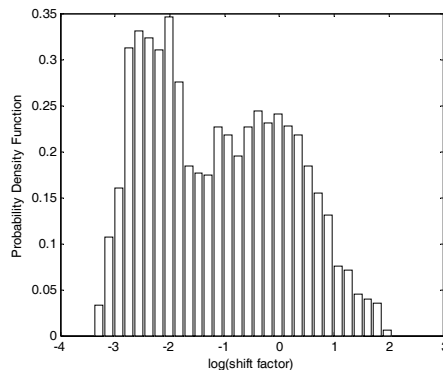


그림 3 이동계수의 확률분포

축소방법(eigenvector dimension reduction(EDR) method, Jung *et. al*(2009))을 이용하여 계산하고 우도함수 값을 계산하였다. 그림 3에는 그림2에 따른 이동계수의 확률분포를 그렸고 그림 4에는 저장계수와 손실계수의 실험값과 우도 함수를 최대화하는 분수차 미분모델의 물성계수 분포로부터 저장계수와 손실계수의 95% 신뢰구간(confidence interval, CI)과 평균값을 주파수에 따라 그렸다. 물성계수의 확률량을 추정하기 위한 보정 파라미터는 $\theta = \{SD_{\log(a_0)}, SD_{\log(a_1)}, SD_{\log(\beta)}\}$ 로 설정하여 통계적 보정법을 수행하였다. 또한 $\log(a_1)$ 과 $\log(c_1)$ 의 상관계수(correlation coefficient)는 일정하다고 가정하였다(Jung *et. al*, 2009)

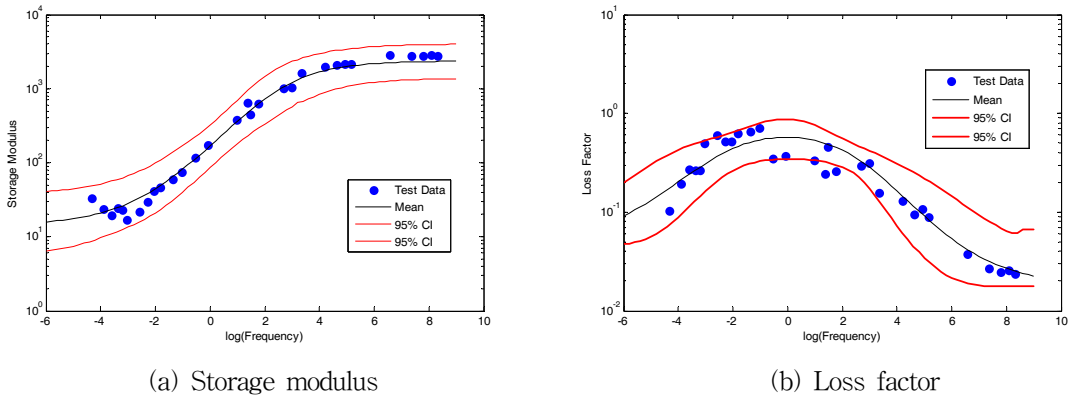


그림 4 SBR에 대한 물성 특성 변동성 추정 결과

감사의 글

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(과제번호 2010-0023464)

참고문헌

- Jones, D.I.G. (2001) Handbook of Viscoelastic Vibration Damping, *John Wiley & Sons*, New York.
 Jung, B.C., Lee, D.H. and Youn, B.D. (2009) Optimal design of constrained-layer damping structures considering material and operational condition variability, *AIAA Journal*, 47(12), pp.2985~2995.