

# 확률적 불확실성을 포함한 손상 장에서의 강성 저감 효과 분석

## Analysis of the effect of damage fields containing stochastic uncertainty on stiffness reduction

노 명 현\* · 이 상 열\*\* · 박 대 효\*\*\*

Noh, Myung-Hyun · Lee, Sang-Youl · Park, Taehyo

### 요 약

본 논문에서는 확률적 불확실성을 포함한 손상 장에서 강성저감 효과를 추정하는 방법을 제안하였다. 실제 교량 구조물에 분포된 손상 장은 매우 불확실하며 손상의 위치와 형상 또한 정확히 알 수 없는 경우가 많다. 그러나 대부분의 손상 추정 문제는 균열이나 손상의 위치와 형상을 기지의 주어진 정보로 가정하고 손상을 추정한다. 제안 기법에서는 이러한 손상의 위치와 형태가 본질적으로 불확실하다는 가정 하에 이 불확실성을 수정 가우스 강성 저감 분포 함수를 도입하여 기술한다. 교량에 국부적으로 발생된 손상은 교량의 요소강성의 저감 분포로 변환되어 손상이 발생한 전체 시스템의 강성을 표현하고 이를 통해 손상이 발생한 시스템의 전체 응답을 해석할 수 있게 된다. 수정 가우스 강성 저감 분포 함수는 손상 분포의 개략적 중심을 표현하는 평균 변수와 강성 저감의 비국소적 분포 특성을 묘사하는 표준편차 변수, 손상 중심의 손상 정도를 표현하는 강성저감 변수로 구성된다. 본 논문에서는 손상 장에서 손상의 위치나 형태에 대한 확률적 불확실성을 기술하는 수정 가우스 강성 저감 분포 함수를 포함한 유한요소모델을 정식화하여 제시한다. 또한 단일 또는 복합 균열로 인해 교량 구조물에 국부적인 손상이 야기된 경우에 대한 수치 예제를 통하여 균열 등에 대한 정보가 불확실하더라도 수정 가우스 강성 저감 분포 함수를 통해 강성 저감 효과가 분석될 수 있음을 확인하였다.

**keywords** : 확률적 불확실성, 수정 가우스 분포 함수, 강성 저감, 손상 추정

## 1. 서 론

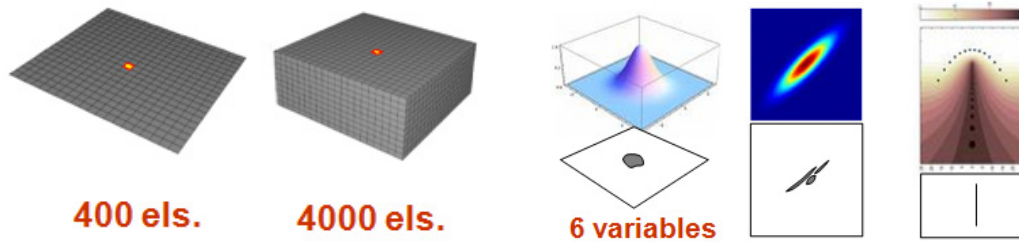
구조물에 발생된 손상의 위치와 형상은 토모그래피 영상과 같은 정밀한 탐사가 수반되지 않을 경우 정확히 추정해내기 현실적으로 거의 불가능하다. 따라서 NDT에 기반한 대부분의 손상 추정기법은 손상 형상을 미리 유한요소 매쉬 크기의 직사각형 등으로 설정해놓고 역해석을 통해 그 위치와 양을 추정하게 된다. 이러한 요소에 기반한 손상 추정기법은 손상 추정의 정밀도를 높이기 위해 요소 수를 크게 증가시켜야 하는 문제점이 있다. 이 경우 각 요소에 손상에 대한 정보를 모두 포함시켜야 하므로 요소가 조밀해질 경우 역해석의 추정 변수가 요소 수의 배로 증가되는 단점이 따르게 된다. 따라서 본 연구에서는 해석 정밀도를 높이기 위하여 요소 수를 크게 증가시키지 않으면서 손상 추정의 정밀도를 높이는 방법을 제안하였다. 또한 기존의 요소 기반 손상 추정 기법에서 손상의 형상을 미리 요소 형상으로 가정하는 것과는 달리 손상의 형상을

\* 정희원 · 포항산업과학연구원 강구조연구소 선임연구원 mhnoh@rist.re.kr

\*\* 정희원 · 국립안동대학교 토목공학과 조교수 lsy@andong.ac.kr

\*\*\* 정희원 · 한양대학교 건설환경공학과 교수 cepark@hanyang.ac.kr

확정적 형상으로 가정하지 않고 손상 장은 본질적으로 확률적으로 불확실하다는 가정을 전제하였다. 이러한 불확실성을 포함한 손상 장에 대한 정보는 강성 장의 강성 저감분포 정보로 변환되어진다. 따라서 손상의 형태와 밀도, 균열의 형상과 개수와 같이 본질적으로 추정이 곤란한 손상에 대한 정보가 확률적 분포함수의 형상으로 표현되며 이를 통해 손상 장에서 강성 저감효과를 분석할 수 있게 된다. 아래 그림 1에 요소 및 확률적 함수에 기반한 손상 추정 기법의 특징이 간략히 제시된다.



(a) 요소 기반 추정 (b) 확률적 함수 기반 추정

그림 1 요소 및 확률적 함수에 기반한 손상 추정 기법의 특징

## 2. 수정 가우스 강성 저감 분포 함수 모델

확률적 분포함수의 형상으로 표현되는 강성 저감 분포를 정식화하기 위해서는 강성저감 변수( $\beta^{(m)}$ )를 도입하여 다음과 같이 손상이 발생한 요소의 재료 강성을 표현하게 된다.

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(m)} = \beta^{(m)} \mathbf{D}^{(m)}$$

(1)

따라서 손상이 발생된 요소의 강성 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(m)} = \beta^{(m)} \int_V \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(m)} \mathbf{B}^{(e)} dV \quad (2)$$

한편, 2차원 평면상에서 시스템의 강성 저감 분포를 나타내기 위하여 다음과 같은 가우스 분포 함수 모델을 도입하게 된다.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi |\mathbf{\Lambda}|} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{\Lambda}^{-1})^2 (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] \quad (3)$$

여기서,  $|\mathbf{\Lambda}|$ 는 표준 편차 행렬의 행렬식이며,  $\mathbf{x}$ 는 좌표 벡터,  $\boldsymbol{\mu}$ 는 평균 벡터를 의미한다. 2차원 평면 문제의 경우는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \rho\lambda_{xy} \\ \rho\lambda_{yx} & \lambda_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{Bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{Bmatrix} \quad (4)$$

식 (3)을 수정한 가우스 분포 형상의 손상 함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d^{(m)}(\mathbf{x}) = d^{(m)} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T (\bar{\mathbf{\Lambda}}^{-1})^2 (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] \quad (5)$$

여기서,

$$d^{(m)} = \frac{1}{2\pi|\Lambda|}, \quad \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서,  $x$ 와  $y$  좌표는 서로 확률적으로 독립이므로 상관계수의  $\rho=0$ 이 적용된 결과이며,  $d^{(m)}$ 은 0과 1사이 값으로 손상 정도를 나타내는 변수를 의미한다.

따라서 임의의 좌표에서 수정 가우스 강성저감 분포 함수는  $\beta^{(m)}(\mathbf{x})=1-\delta^{(m)}(\mathbf{x})$ 의 관계식을 적용하면 다음과 같이 도출된다.

$$\beta^{(m)}(\bar{\mathbf{x}}) = 1 - d^{(m)} \exp\left[-\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{R}_\theta (\bar{\Lambda}^{-1})^2 \mathbf{R}_\theta^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})\right] \quad (7)$$

식 (7)을 통해 (ixj)번째 요소에서 강성 저감 값은 다음과 같이 얻어진다.

$$\tilde{\beta}^{(m)}(\xi) = 1 - d^{(m)} \exp\left[-\frac{1}{2}(\xi - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{R}_\theta (\bar{\Lambda}^{-1})^2 \mathbf{R}_\theta^{-1} (\xi - \boldsymbol{\mu})\right] \quad (8)$$

여기서,

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \times L_x / N_x^d \\ j \times L_y / N_y^d \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, N_x^d \quad \text{and} \quad j = 1, 2, \dots, N_y^d) \quad (9)$$

식 (8)을 이용하면 k번째 손상 요소의 강성 행렬이 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(k)} = \tilde{\beta}^{(m)}(\xi^{(k)}) \mathbf{K}^{(m)} \quad (10)$$

식 (10)을 적용한 시스템의 지배 방정식은 다음과 같은 일반적인 운동방정식이 된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}(t) \quad (11)$$

### 3. 불확실한 손상 특성을 추정하기 위한 역해석 절차

불확실한 손상 특성을 추정하기 위해서 수정 가우스 강성 저감 분포 함수의 변수를 포함하는 역해석 추정 변수를 다음과 같이 선정할 수 있다.

$$\mathbf{q}^s = [q^1 \ q^2 \ q^3 \ q^4 \ q^5 \ q^6 \ q^7 \ q^8]^T = [1 - \beta \ \mu_x \ \sigma_x \ \mu_y \ \sigma_y \ \theta \ w \ v]^T \quad (12)$$

여기서,  $\mu$ 는 손상 분포의 개략적 중심을 표현하는 평균 변수이며,  $\sigma$ 는 강성 저감의 비국소적 분포 특성을 묘사하는 표준편차 변수,  $\beta$ 는 손상 중심의 손상 정도를 표현하는 강성저감 변수를 의미하며,  $\theta$ 는 손상 중심의 회전을 나타내는 변수이며,  $w$ 와  $v$ 는 시스템에 가해지는 이동 하중의 무게와 속도를 각각 의미한다.

식 (12)의 역해석 변수를 추정하는 문제는 불확실성을 포함한 손상 장에서의 강성 저감 분포를 추정하는 문제로서 다음과 같은 최적화 문제로 정식화 될 수 있다.

$$\text{minimize} \left( \mathcal{E} = \sum_{i=1}^N [{}^i\Psi - {}^iU(\mathbf{q}^s)]^2 \right) \quad (13)$$

여기서,  ${}^1\Psi, \dots, {}^N\Psi$ 는 교량 센서의 동적 신호를 의미하며,  ${}^iU: \mathfrak{R}^s \rightarrow \mathfrak{R}$ 는 다음과 같은 벡터 함수를 만족시키는 함수이다.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}: \Omega \subset \mathfrak{R}^s &\rightarrow \Gamma \subset \mathfrak{R}^N \\ \mathbf{U}(\mathbf{q}^s) &= [{}^1U \ {}^2U \ \dots \ {}^N U]^T; \quad \mathbf{q}^s \in \Omega \end{aligned} \quad (14)$$

#### 4. 수치 예제 결과 및 분석

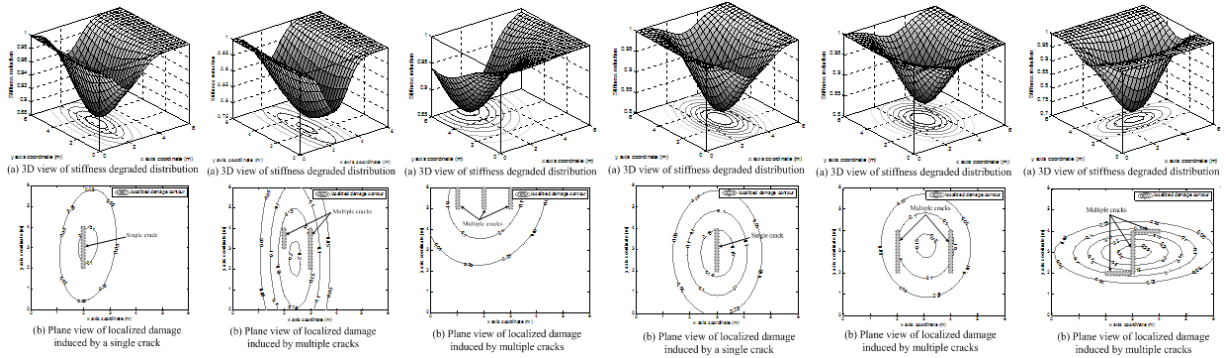


그림 2 단일/복합 균열 손상 추정 결과

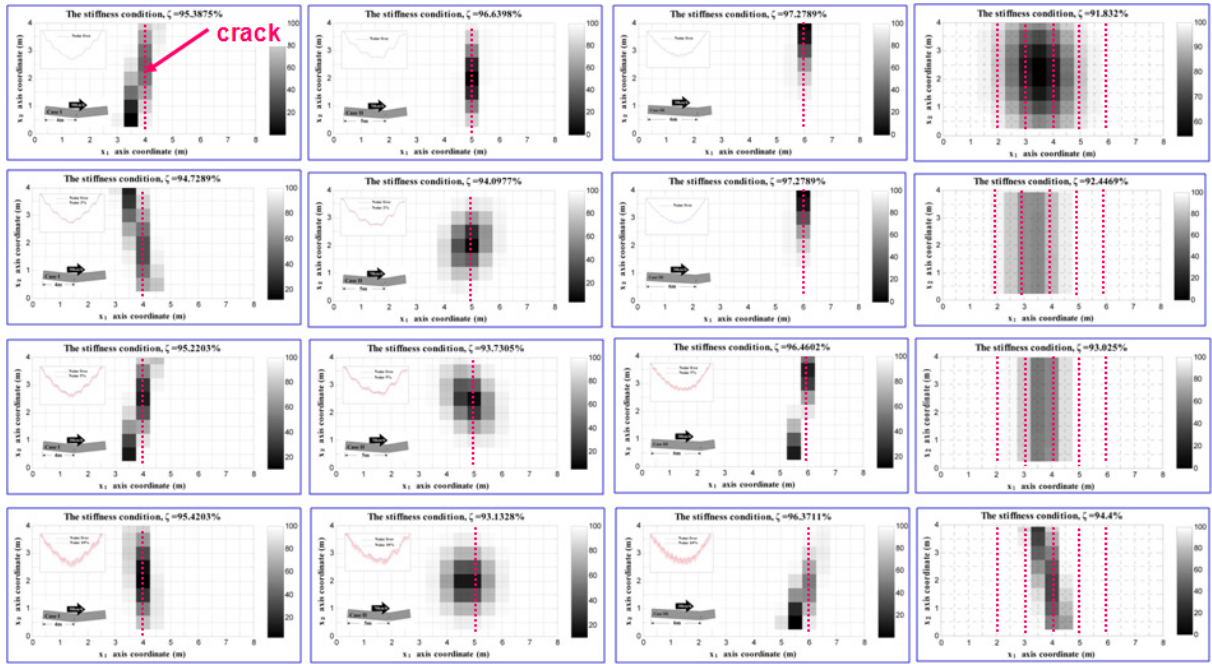


그림 3 손상정보/계측데이터/모델 불확실성이 고려된 균열 손상 추정 결과

그림 2와 3에 손상 정보의 불확실성이 고려된 균열 손상 추정 결과가 도시되어 있다. 그림에서 보이는 바와 같이 단일/복합 균열 손상이 국부적으로 나타나는 경우와 분산되어 나타나는 경우 모두 수정 이변수 가우스 강성 저감 분포함수에 의해 균열 손상 특성이 강성 저감 분포로 적절히 변환되어 나타는 것으로 분석된다. 따라서 제안된 기법에 의해 확률적 불확실성을 포함한 손상 장에서의 강성 저감 효과 분석이 가능할 것으로 판단된다.

#### 참고문헌

노명현, 이상열 (2010) 불완전 동적 데이터로부터 복합신소재로 보강된 교량의 함수기반 역해석에 의한 성능 평가, 한국복합신소재구조학회 논문집, 1(2), pp.51~58.

**Park, T., Noh, M.H., Lee, S.Y., and Voyiadjis, G.Z.**(2009) Identification of a distribution of stiffness reduction in reinforced concrete slab bridges subjected to moving loads, *Journal of Bridge Engineering* (ASCE), 14(5), pp.355~365.