

유연도법에서의 기하학적 비선형 모델

Geometrically Non-linear Model in Flexibility Method

권민호* · 김진섭**

Kwon, Min-Ho · Kim, Jin-Sup

요약

유연도법 기반의 공식화에서는 변위영역의 형상함수를 라그랑지언(Lagrangian)보간법에 의한 곡률로부터 횡방향 변위를 유도한다. 곡률변위보간법으로 유도한 매트릭스를 사용한 기하학적 비선형 해석방법과 강성도법을 기반으로 한 비선형 기존의 유한요소 해석 프로그램의 결과를 비교하여 적용이 가능함을 확인하였고, Spacone의 이론을 확장시켜 기하학적 비선형 거동을 예측할 수 있는 유연도법의 알고리즘을 제안하였다. 예제를 통하여 실제 문제에 대한 기하학적 비선형 해석을 수행하였다.

keywords : 기하학적 비선형, 유연도 행렬, 곡률변위보간법

1. 서론

기하학적 비선형 해석에 대한 프레임 요소의 방정식을 구하는 고전적인 방법은 축력과 함께 휨에 대한 지배미분방정식으로부터 기하강성을 직접적으로 유도하는 것이다. 이때 기하학적 비선형 구조물에 대한 프레임 요소의 정식화는 변위형상함수와 부재의 축방향 변위에 근거하고 있다. 유연도법에 기반을 둔 유한요소의 공식화는 내력형상함수를 기초로 한다. 변형된 상태에서의 힘의 평형은 내력형상함수에 의해 만족되고, 그것은 기하학적 비선형 상태에서 횡방향 변위를 포함하는 것을 의미한다. 유연도법을 기반으로 둔 공식화에서는 변위영역의 형상함수가 없기 때문에, 본 논문에서는 Lagrangian 보간법에 의한 곡률로부터 횡방향 변위를 유도하는 새로운 방법을 사용하였다. 최근의 유연도법을 이용한 연구들(Spacone et al. 1996)은 강도 연성화 해석 영역에서 적은 자유도로도 전체와 국부 응답에서의 정확한 예측이 가능함을 보여 주었다. 이 연구들은 엄격한 의미에서 요소 평형상태를 만족시키기 위하여 단순한 기하학적 선형 구조물에 대한 것들이었다. 유연도법을 이용한 기하학적 비선형 문제를 정식화하기 위한 시도가 이루어졌었지만, 강성도법을 기반으로 한 기존의 비선형 유한요소 해석 프로그램에 적용하기에는 어려움이 있었다. 본 논문의 목적은 Spacone (1996)의 이론을 확장시켜 기하학적 비선형 거동을 예측할 수 있는 유연도법 개발에 있다. 적용대상구조물은 탄성재료인 선형 평면 프레임 구조물로 제한하였다.

2. 유연도법

평면구조의 유한요소모델은 Euler-Bernoulli의 기하학적 비선형 해석이론에 기초를 두고 있다. 전단변형

* 정희원 · 경상대학교 토목공학과, 공학연구원 부교수 kwonm@gnu.ac.kr

** 경상대학교 토목공학과 박사과정 jskim0330@gmail.com

은 고려하지 않으므로 변형률행렬 $d(x)$ 와, 내력행렬 $D(x)$ 는 다음과 같다.

$$d(x) = [\kappa(x) \quad \varepsilon(x)]^T = [-w''(x) \quad u'(x) + 0.5(w'(x))^2]^T \quad (2-1)$$

$$D(x) = [M(x) \quad N(x)]^T = k \cdot d(x) \quad (2-2)$$

2.1. 지배방정식

강체회전을 제외한 절점력과 내력행렬 $D(x)$ 와의 관계는 식(2-3)과 같다. 또한 평형상태로부터 유연도 기반의 기본 지배방정식을 유도하면 식(2-4)와 같다.

$$D(x) = b[x, w(x)] \bar{Q} \quad (2-3)$$

$$\text{여기서, } b[x, w(x)] = \begin{bmatrix} x-1 & x & -w(x) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \frac{L}{2}(\xi+1)$$

$$\bar{q} = \int_L b^{*T}[x, w(x)] dx = 0 \quad (2-4)$$

$$\text{여기서, } b^*[x, w(x)] = \begin{bmatrix} x-1 & x & -w(x)/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \frac{L}{2}(\xi+1), \quad \xi = \text{Gauss Point}$$

2.2. 유연도 매트릭스

기하학적 비선형의 유연도 기반의 해석에 있어서, 유연도 매트릭스 F 는 지배 방정식으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} F = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{Q}} &= \int_L \left[b^{*T}(x) \frac{\partial d(x)}{\partial \bar{Q}} + \frac{\partial b^{*T}(x)}{\partial \bar{Q}} d(x) \right] dx \\ &= \int_L \left[b^{*T}(x) f b(x) + \partial b^{*T}(x) f \frac{\partial b(x)}{\partial w(x)} \bar{Q} \frac{\partial w(x)}{\partial \bar{Q}} \right] dx + \int_L \frac{\partial b^{*T}(x)}{\partial w(x)} d(x) \frac{\partial w(x)}{\partial \bar{Q}} dx \end{aligned} \quad (2-5)$$

식(2-5)은 식(2-4)로부터 유도되며, 이것은 변분원리를 기반으로 한다. 식(2-5)의 모든 표현은 $\partial w(x)/\partial \bar{Q}$ 의 값으로 직접 구할 수 있다. $\partial w(x)/\partial \bar{Q}$ 의 값이 구해지면 식(2-5)를 Gauss적분법으로 수치적분하여 유연도 매트릭스를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial w(x)}{\partial \bar{Q}} = \left[\frac{\partial w(x)}{\partial Q_1} \quad \frac{\partial w(x)}{\partial Q_2} \quad \frac{\partial w(x)}{\partial Q_3} \right] \quad (2-6)$$

여기서, 식(2-6)은 구조물내의 단면에서 유도되며, 곡률을 사용한 변위 보간법으로 구한다.

2.3. 곡률 변위 보간법

곡률 변위 보간법에서 변형률 $d(x)$ 는 n번째 적분점에서의 값이고, 그 후 새로운 방법은 n번째 적분점에서의 ξ_j 에 대한 곡률값 $\kappa_j = \kappa(\xi_j)$ 에 의한 변위 $w(x)$ 에 의해 유도되었다. Lagrangian의 보간함수 공식으로부터 아주 쉽게 얻을 수 있다.

$$\kappa(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) \kappa_j \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2-7)$$

$$\text{여기서, } l_j(\xi) \text{ 는 Lagrangian 다항식, } l_j(x) = \frac{\prod_{j=1, i \neq j}^n (x - x_i)}{\prod_{j=1, i \neq j}^n (x_j - x_i)} \quad (2-8)$$

위 식은, $l_j(x_i) = \delta_{ij}$ 인 조건을 만족한다. Lagrangian 다항식 $l_j(x)$ 는 표본점 x_j 과 비례적으로 위치가 동일한 점에서는 임의의 값을 가지지만, 그 외의 다른 표본점에서는 모든 값이 영(零)이 된다.

2.4 적합조건식

Lagrangian 다항식으로 유도한 적합조건식은 다음과 같다.

$$A(\bar{Q}_1)w = \bar{Q}_2 B + \bar{Q}_3 C \quad (2-9)$$

$$\text{여기서, } A(\bar{Q}_1) = I - \bar{Q}_1 \frac{L^2}{EI} I^*, \quad B = -\frac{L^2}{EI} I^* x, \quad C = -\frac{L^2}{EI} I^* \bar{x}$$

적합 방정식으로 식(2-6)의 $\partial w(x)/\partial \bar{Q}$ 행렬의 값들을 구할 수 있다. 여기서, 적합방정식을 유도할 때 사용된 식(2-3)과 식(2-4)에 포함된 $b[x, w(x)]$ 와 $b^*[x, w(x)]$ 식은, 구조물에 작용하는 하중으로 인해 부가적인 휨 모멘트를 발생시키는 횡방향 변위 $w(x)$ 를 포함한 형태로 되어 있다. 구해진 적합 방정식으로 식(2-6)을 유도하면 식(2-10)과 같다.

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{Q}_1} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \bar{Q}_1} w, \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{Q}_2} = A^{-1} a_2, \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{Q}_3} = A^{-1} a_3 \quad (2-10)$$

식(2-6)이 구해지면 식(2-5)로부터 유연도 매트릭스를 결정할 수 있다. 식(2-5)는 수치적분에 의하여 적분하였고 수치적분에 사용된 표본점을 식(2-10)에서도 동일하게 사용하였다.

3. 적용성 분석

앞에서 구한 유연도 매트릭스로 절점력을 구해서 원래의 절점력과 비교를 한다. 절점력이 일치하지 않으면 변위를 조절하여 이 변위에 대한 유연도 매트릭스를 구하면서 반복적으로 기하학적 변위를 찾는다. 제안된 방법에서 구해지는 단면력과 초기에 가해지는 절점력을 사용하여 내력의 상대적인 그래프를 그려보았다. 이 때, 식(2-13)의 $M(x)$ 는 곡률 변위 보간법을 적용하여 구한 내력인 굽힘모멘트이다.

$$\frac{M(x)}{\bar{Q}_2} = \frac{\text{Sin}(x\psi)}{\text{Sin}(\psi)}, \quad \psi = L \sqrt{\frac{\bar{Q}_1}{EI}} \quad (2-13)$$

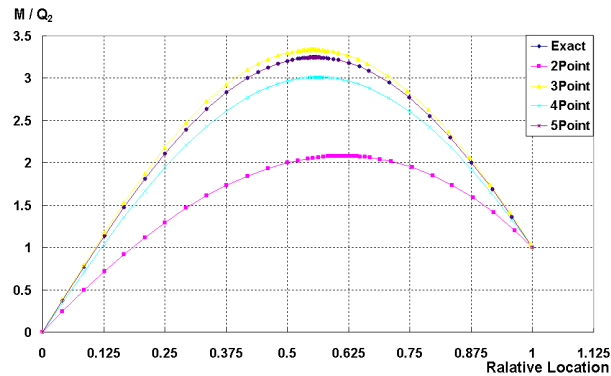


그림 1 $\overline{Q_3}=8$ 인 경우의 유연도법 해석

그림 1의 그래프는 Gauss 점의 개수에 따른 부재의 상대적인 거리에 대한 내력모멘트비를 나타낸 그래프이다. 유연도법에서는 사용하는 요소의 수는 하나이고, 수치적분법에서 적분되는 표본점의 개수를 달리 하였다. 적분점의 개수를 늘릴 때 마다 점점 더 정해에 근접하였다. 특히 5개의 적분점을 사용한 경우에는 정해와 거의 똑같은 값을 나타내고 있다.

4. 결 론

강성도법에서는 사용하는 요소의 수를 결정하여 정확한 값을 구하지만, 유연도법에서는 사용하는 요소의 수는 하나이다. 대신에 한 요소 내에서는 상대적인 위치의 표본점의 수를 달리하여 수치적분 하였다. 수치적분으로 구한 값은 사용하는 표본점의 수가 적음에도 정해에 가까운 값을 보여주었고 요소수가 적기 때문에 해석시간이 짧다. 따라서 본 논문에서 제안된 곡률변위보간법을 사용하여 유도해낸 유연도 매트릭스를 비선형 평면 탄성재료구조물의 유한요소해석에 적용이 가능하다고 판단된다.

감사의 글

본 연구는 국토해양부 건설기술혁신사업의 구조물-지반 상호작용을 고려한 구조물 비선형 내진 성능평가 도구 개발과제 연구비지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

- Carol, I., and Murcia, J. (1989). "Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an 'exact' formulation-I: Theory." *Comp. and Struct.*, 33, 79-87
- Spacone, E., Ciampi, V., and Filippou, F. C. (1996). Mixed formulation of nonlinear beam finite element. *Comp. and Struct.*, 58, 71-83
- Neuenhofer, A., and Filippou, F. C. (1997). "Evaluation of nonlinear frame finite-element models." *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 123, 958-966.
- Backlund, J. (1974). "Large deflection analysis of elasto-plastic beams and frames" *int. J. Mech. Sci.*, 18, 269-277.