

강내탄도 해석에 사용되는 Ergun식에 관한 수치적 연구

배 세 옥,¹ 성 형 건,¹ 노 태 성²

NUMERICAL ANALYSIS OF ERGUN'S EQUATION FOR INTERIOR BALLISTIC ANALYSIS

S.W. Bae,¹ H.G. Sung¹ and T.S. Roh²

In this study, the Ergun's equation has been verified in order to calculate pressure drop of the two phase flow. The equation had been used in the high Reynolds number region for interior ballistic analysis in spite of being verified in the low Reynolds number region. Therefore additional verification seems to be inevitable. Thus, the validity of the equation has been verified using CFD in the high Reynolds number cases of the diameter-particle ratio 10, 13 and 16.

Key Words : Ergun 식(Ergun's Equation), 고 레이놀즈수 (High Reynolds Number), 기공률(Porosity), 직경-입자비(Diameter-Particle Ratio), 강내탄도 (Interior Ballistic)

1. 서 론

이상유동(Two Phase Flow)은 석탄/바이오매스 가스화, 폐수/오염가스 처리, 디젤 기관, 열교환기 등 현대 각종 산업에서 폭넓게 나타내는데, 심지어 토양 특성에 따른 지진 특성의 연구나 화포 연구에서도 이상유동을 다룬다. 이들 이상유동 현상에 대한 수치적 연구에서는 연속상과 분산상으로 나누어 전산해석을 수행한다. 기체와 고체를 다루는 이상유동의 경우에 연속상의 지배방정식에 기공률을 도입하고 운동량 방정식과 에너지 방정식에 고체에 의한 압력저하(pressure drop)를 고려한다. 이 때, 연속상의 압력저하와 고체의 운동방정식은 Ergun[1]의 실험식을 주로 사용하는데 다음과 같다.

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{150\mu U}{d_p^2} \frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} + \frac{1.75\rho U^2}{d_p} \frac{1-\epsilon}{\epsilon^3} \quad (1)$$

여기서 d_p 는 입자 평균 크기, L 은 Bed의 길이, ϵ 은 porosity, U 는 superficial velocity이다. Ergun 식은 저 레이놀즈

수(Re, Reynolds Number)에서 실험하여 얻어진 식이지만, 고 레이놀즈수 영역인 강내탄도의 수치적 연구 등에서도 광범위하게 사용되고 있다. 최근 들어 Ergun 식에 대한 유효 범위에 대해 전산유체역학을 통한 수치적 연구가 수행되고 있다. Calis 등은 low tube diameter-particle diameter ratio(이하 D/d_p)에 대하여 압력저하 특성을 연구했는데, CFD 해석결과가 실험데이터와 20%의 오차로 압력저하를 예측하였다.[2] T. Atmakidis 등은 적당한 D/d_p 값의 입자의 정렬/비정렬 구조에서 CFD 해석 결과와 Ergun, Carman, Zhavoronkov, Reichelt의 실험식을 비교하였다. 그 결과, regular 구조는 Carman와 irregular 구조는 Zhavoronkov, Reichelt의 식의 결과와 잘 일치하였다.[3] 또, R. K. Reddy 등은 creeping/transition/turbulent region에서의 CFD와 실험, Ergun식의 결과의 비교연구를 수행하였다. 항력계수(C_d)의 예측해 보면, creeping($0.1 \leq Re \leq 1$) 영역에서는 CFD 해석결과가 실험결과와 잘 일치하고 있으나, turbulent($Re \geq 1000$) 영역에서는 10-25%의 오차를 나타내었다. Ergun 식은 creeping 영역에서 실제보다 더 작은 항력계수 값을 예측하였고, transition($1 \leq Re \leq 1000$) 영역에서는 CFD 해석결과와 유사하게 예측하였다[4]. 이들 결과를 종합해보면, $Re < 10000$ 에서 CFD 결과와 실험결과는 잘 일치하였고, Ergun 식은 $Re < 100$ 에서 잘 일치하였다. $Re > 100$ 일 때, Ergun 식은 실험결과와 경향성은 유사하게 나타났으나 레이놀즈수가 증가함에 따라 오차도 증가하였다. 이는 Ergun 식이 저

1 인하대학원 항공우주공학과

2 인하대학교 항공우주공학과

* TEL : 032) 860-8652

* Corresponding author, E-mail: sky179@naver.com

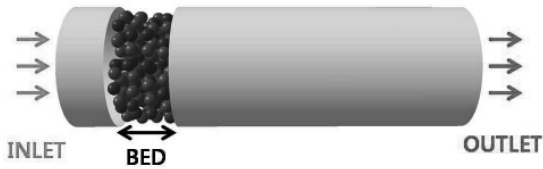


Fig. 1 Modelling using CATIA

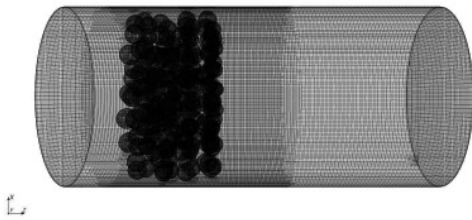


Fig. 2 The 3D grid of modelling

레이놀즈수에서 실험을 통해 얻어졌기 때문이다. 실제 이상 유동의 경우, $D/d_p \geq 10$, 불균일한 볼 크기 및 랜덤 형상, 고 레이놀즈수 등의 조건에서 연구가 수행된다. 따라서 이들 영역에서의 이상유동의 특성을 분석하고 이를 반영하는 보정된 압력저하 식에 대한 연구가 필요하다. 본 연구에서는 압축성 기체 조건과 균일한 크기의 볼 형상에서 $D/d_p \geq 10$ 과 고 레이놀즈수에 따른 Ergun 식과의 차이에 대한 수치적 연구를 수행하였다.

2. 본 론

2.1 해석 모델 및 조건

Ergun 식을 보면, 동일한 기공률과 입자 반지름에서 실린더의 직경 D 또는 D/d_p 에 상관없이 동일한 압력저하 값을 예측한다. $D/d_p \geq 10$ 과 고 레이놀즈수에 따른 압력저하 특성에 관한 연구 수행하기 위해 D/d_p 가 10, 13, 16인 3가지 경우의 형상모델을 만들어 Ergun 식의 결과와 비교 연구하였다.

해석 모델에 대한 형상은 Fig.1과 같고, 형상 조건은 Table 1과 같다. 각각의 해석 모델은 Fig. 1에 보이듯이 중앙에서 압력저하를 만들어 내는 Ball들이 밀집하여 있는 Bed 구간(0.099m), 입구에서 Bed앞까지의 입력구간(0.072m), Bed에서 출구까지의 확산구간(0.480m)의 3개의 구간으로 나누어 주었다. Bed구간은 총 4 개의 layer로 구성하였으며, 동일한 기공률 0.757이 되도록 $D/d_p=10$ Case는 180개, $D/d_p=13$ Case는

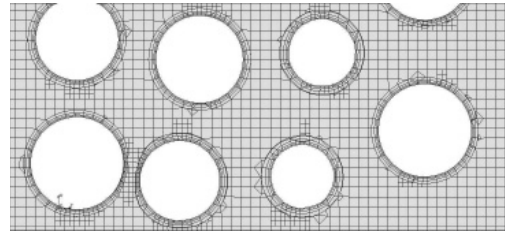


Fig. 3 Local grid of modelling of XZ-section

304개, $D/d_p=16$ Case는 460개의 Ball을 Bed 구간에 배치하였다. 확산구간은 Bed를 지나면서 복잡해진 유동이 균일해져 후처리에서 압력 계산이 가능하도록 하였다.

해석 격자는 commercial software “STAR CCM+ V4.06”에 내장된 프로그램을 사용하여 Structured grid와 prism layer grid를 혼합하여 만들었다. D/d_p 에 따라 각각 170만개, 253만개, 359만개의 격자를 만들었고 격자의 자세한 형상은 Fig. 2, Fig. 3와 같다. 해석에 사용된 유체는 공기이며 이상기체 상태방정식을 사용하였다. 또한 유동은 stationary steady 특성을 가지고 있으며, 입구에서 유입되는 유동은 flat velocity를 가진다. inlet과 outlet은 2기압으로 동일하며, 해석 모델의 cylinder wall과 particle surface는 no-slip 조건을 사용하였다. 전산해석에는 Coupled solver, implicit integration, 2nd-order Upwind discretization 기법을 사용하였다. Turbulent flow의 계

Table 1. Details of geometrical models

Parameter	Details		
	$D/d_p=10$	$D/d_p=13$	$D/d_p=16$
Cylinder diameter[m]	0.20	0.26	0.32
Particle diameter[m]	0.02	0.02	0.02
layer [-]	4	4	4
Number of particle [-]	180	304	460
Total cylinder length [m]	0.627	0.627	0.627
Inlet-Bed length [m]	0.072	0.072	0.072
Bed length [m]	0.099	0.099	0.099
Bed-outlet length [m]	0.480	0.480	0.480
Porosity[-]	0.757	0.757	0.757
Number of cell [-]	1.70m	2.53m	3.59m



$D/d_p = 10, Re = 10^4$
인 연구가 필요하다.



$D/d_p = 10, Re = 10^5$



$D/d_p = 10, Re = 10^6$



$D/d_p = 13, Re = 10^4$



$D/d_p = 13, Re = 10^5$



$D/d_p = 13, Re = 10^6$



$D/d_p = 16, Re = 10^4$



$D/d_p = 16, Re = 10^5$



$D/d_p = 16, Re = 10^6$

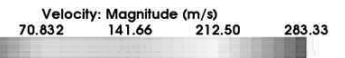
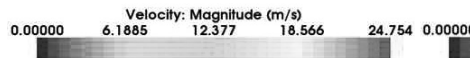
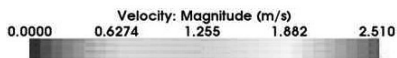
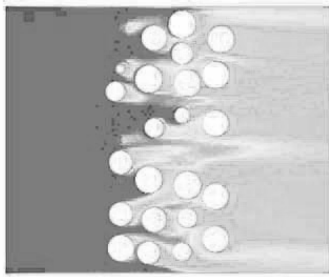
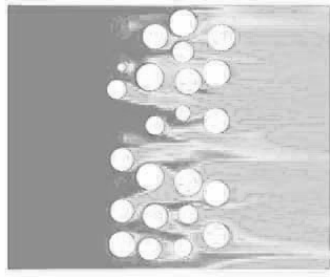


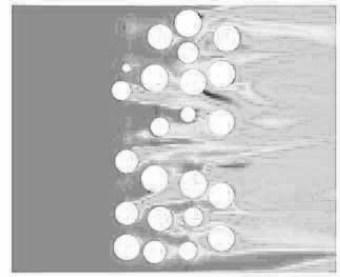
Fig. 4 Velocity distribution at Z=0.135m



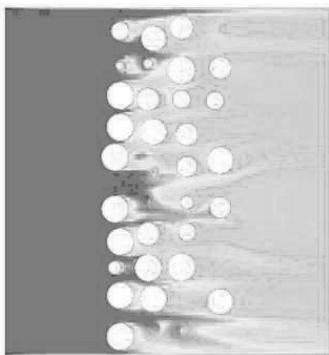
$D/d_p = 10, Re = 10^4$



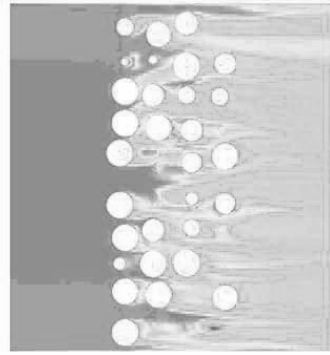
$D/d_p = 10, Re = 10^5$



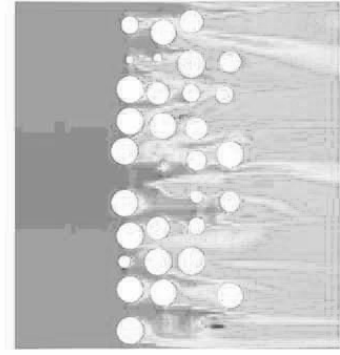
$D/d_p = 10, Re = 10^6$



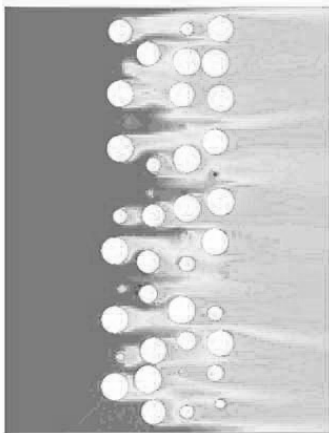
$D/d_p = 13, Re = 10^4$



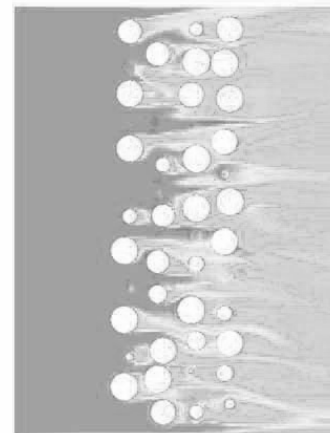
$D/d_p = 13, Re = 10^5$



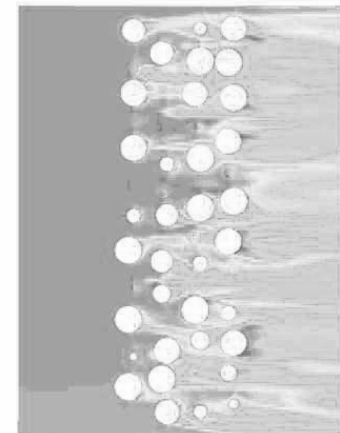
$D/d_p = 13, Re = 10^6$



$D/d_p = 16, Re = 10^4$



$D/d_p = 16, Re = 10^5$



$D/d_p = 16, Re = 10^6$

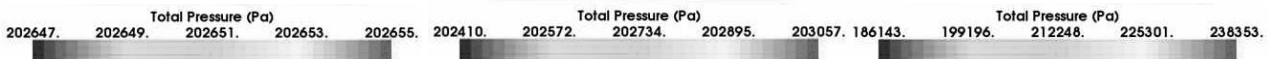


Fig. 5 Velocity distribution at XZ-Section

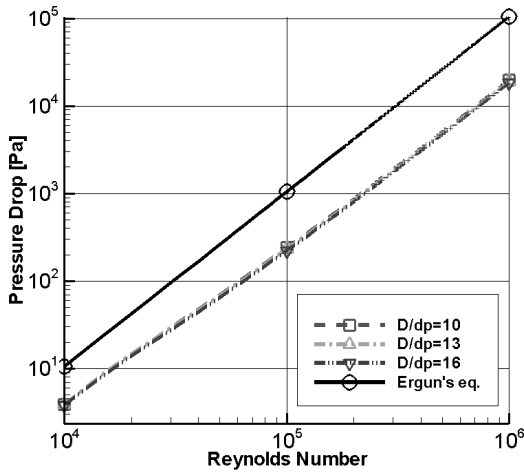


Fig. 6 The comparison of Ergun's equation and CFD Result

산을 위해서는 $k-\epsilon$ turbulent model이 사용하였고, 전산해석에는 commercial software "STAR CCM+ V4.06"을 사용하였다.

2.2 해석 방정식

전산해석에 사용된 지배방정식은 Navier-Stokes 방정식을 사용하였고, Cartesian integral form은 아래와 같다.

$$\frac{d}{dt} \int_V W_x dV + \oint [F - G] \cdot da = \int_V H dV \quad (2)$$

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho(v - v_g) \\ \rho(v - v_g) \otimes v + pI \\ \rho(v - v_g)H + pv_g \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ T \\ T \cdot v + \dot{q}'' \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ f_r + f_g + f_p + f_u \\ 0 \end{bmatrix}$$

ρ 는 밀도, v 는 속도, E 는 단위 질량당 total energy, p 는 유체 압력이다. T 는 viscous stress tensor이고, \dot{q}'' 는 heat flux vector, v_g 는 grid velocity vector이다. total energy는 total

Table.2 The result of CFD and Ergun's equation [Pa]

D/d_p Re	10	13	16	Ergun's eqn.
10 ⁴	3.922E0	3.891E0	3.797E0	1.056E1
10 ⁵	2.401E2	2.340E2	2.223E2	1.048E3
10 ⁶	1.985E4	1.906E4	1.826E4	1.047E5

enthalpy에 관련되며,

$$E = H - p/\rho \quad (3)$$

$$H = h + |v|^2/2$$

$$h = C_p T$$

H 는 body force vector이다. 난류 모델은 Realizable two-layer $k-\epsilon$ 모델을 사용하였고, 이 모델에 사용된 난류 상수 값은 $C_\mu = 0.09$, $C_{\epsilon 1} = 1.44$, $C_{\epsilon 2} = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\epsilon = 1.2$ 이다.

2.3 해석 결과 및 검토

D/d_p 가 10, 13, 16인 3가지 모델에 대해 Re 가 10⁴, 10⁵, 10⁶의 3가지 유동조건에서 전산해석을 수행하였다. 그 결과 Fig. 4, Fig. 5 같은 속도 분포, 압력 분포를 얻었고, 이를 통해 계산된 압력저하는 Fig. 6에 레이놀즈수에 따른 Ergun식과 CFD 해석의 압력저하 결과를 비교하여 도식화하였다. CFD 해석결과와 Ergun식의 결과가 정성적으로 같은 경향성을 띄고 있으나, 레이놀즈수가 증가함에 따라 정량적으로는 큰 차이가 나타난다. Table 2는 D/d_p 가 10, 13, 16인 Case와 Ergun 식을 Re 가 10⁴, 10⁵, 10⁶의 유동조건에 따라 압력저하를 해석한 결과이다. 전산해석 결과에 따르면 동일한 레이놀즈수에서 D/d_p 비가 증가함에 압력저하는 미소하게 감소하였으나, Ergun 식의 결과와는 큰 차이가 나타났다. Table 3은 Ergun 식 대비 CFD 해석결과의 비를 나타낸 것으로, 레이놀즈수가 증가함에 따라 Ergun식의 해석결과와 큰 차이가 나타났다. 이는 channelling effect에 의한 것으로 판단되며, 비압축성 유체인 물을 사용한 R. K. Reddy 등의 연구 결과와도 유사하다. R. K. Reddy 등의 연구에서 레이놀즈수가 증가함에 따라 channelling effect가 Ball 입자의 항력계수를 감소시켜 압력저하를 감소시키는 것으로 나타났으며, $Re = 10000$, 기공률 0.423에서 channelling effect에 의해 압력저하를 72% 감소시켰다.[4] 압축성 유체를 사용한 본 연구에서도 동일한 D/d_p 에서 레이놀즈수가 증가함에 따라 channelling effect가 증가하여 Ergun 식의 압력저하 값보다 낮은 압력저하 값을 계산하였다.

Table3. The ratio of CFD result compared with Ergun's eq.

D/d_p Re	10	13	16
10 ⁴	37.1%	36.8%	36.0%
10 ⁵	22.9%	22.3%	21.2%
10 ⁶	19.0%	18.2%	17.4%



동일한 레이놀즈수에서 D/d_p 가 증가함에 따라 압력저하가 미소하게 감소하는 것은 도관의 직경이 증가함에 따라 압력 손실이 감소하기 때문이다. Ergun식의 정량적인 보정을 위해서는 channeling effect 등에 대한 추가적인 연구가 필요하다.

3. 결론

본 연구에서는 이상유통의 수치적 연구에 사용되는 Ergun 식과 전산해석을 통한 압력저하를 비교 연구하였다. D/d_p 가 10, 13, 16인 3가지 경우에 대해 해석모델을 고 레이놀즈수 ($10^4, 10^5, 10^6$)의 유동조건에 따른 압력저하를 수치적으로 계산하여 Ergun 식과 비교해 보았다. 그 결과 정성적으로 같은 경향성을 띄었으나 정량적으로는 레이놀즈수가 증가함에 따라 차이가 증가하였다. 이는 레이놀즈수가 증가함에 따라 channeling effect가 증가하여 압력저하 값이 감소하기 때문임을 확인하였다. 또한, 동일한 레이놀즈수에서 D/d_p 의 증가에 따라 압력저하 값은 감소하였는데 이는 벽면의 크기가 증가함에 따라 압력손실이 줄어들기 때문이었다. 압축성 유체를 사용하는 경우에도 Ergun 식이 레이놀즈수에 따라 정량적으로 차이가 나타남을 확인하였고, channeling effect에 따른 Ergun 식이 보정 연구가 수행할 예정이다.

후 기

본 연구는 방위사업청과 국방과학연구소의 지원에 의한 연구결과입니다. 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] 1952, Ergun, S., "Fluid flow through packed columns," *Chem. Eng. Prog.*, vol.48, pp.89-94.
- [2] 2001, Calis, H.P.A. et al, "CFD modelling and experimental validation of pressure drop and flow profile in a novel structured catalytic reactor packing," *Chemical Engineering Science*, Vol.56, pp.1713-1720.
- [3] 2009, Theodoros, Atmakidis et al, "CFD-based analysis of the wall effect on the pressure drop in packed beds with moderate tube/particle diameter ratios in the laminar flow regime," *Chemical Engineering Journal*, Vol.155, pp.404-410.
- [4] 2008, Rupesh, K. Reddy et al, "CFD modeling of pressure drop and drag coefficient in fixed and expanded beds," *chemical engineering research and design*, Vol.86, pp.444-453
- [5] 2001, Anthony, G. Dixon et al, "CFD as a Design Tool for Fixed-bed Reactor," *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol.40 pp.5246-5254
- [6] 1983, Howard, J.R., "Fluidized Beds; combustion and applications," *Applied Science Publishers*, pp.1-19
- [7] 2009, *USER GUIDE STAR CCM+ Version 4.06.11*, CD-adapco.