



공기-물 이상매질 충격파관 문제에 대한 정확한 Riemann 해법

염금수,¹ 장근식^{*2}

EXACT RIEMANN SOLVER FOR THE AIR-WATER TWO-PHASE SHOCK TUBE PROBLEMS

G.S. Yeom¹ and K.S. Chang^{*2}

In this paper, we presented the exact Riemann solver for the air-water two-phase shock tube problems where the strength of the propagated shock wave is moderately weak. The shock tube has a diaphragm in the middle which separates water medium in the left and air medium in the right. By rupturing the diaphragm, various waves such as rarefaction wave, shock wave and contact discontinuity are propagated into water and air. Both fluids are treated as compressible, with the linearized equations of state. We used the isentropic relations for the air and water assuming a weak shock wave. We solved the shock tube problem considering a high pressure in the water and a low pressure in the air. The numerical results clearly showed a left-traveling rarefaction wave in the water, a right-traveling shock wave in the air, and the right-traveling material interface.

Key Words : 정확한 Riemann 해법(Exact Riemann Solver), 이상유동(Two-Phase Flow), 공기-물 충격파관(Air-Water Shock tube), 선형상태방정식(Linearized Equation of State)

1. 서 론

충격파관 문제는 서로 다른 상태에 있는 두 유체가 관내 격막을 사이에 두고 초기에 분리되어 있다가 갑작스런 격막의 파괴에 의해 다양한 파동이 생성되어 전파되는 것을 다루는 고전적인 문제이다. 이것은 고속의 압축성 유체에서 발생하는 현상을 이해하는데 중요하게 사용된다. 단상유동(예: 공기) 충격파관 문제는 실험적 또는 이론적으로 많은 연구가 수행되어 왔으며, 특히 이론적으로는 정확한 해법(Exact Riemann Solver)이 잘 알려져 있다[1].

하지만 이상유동에서는 파동 전파에 대한 연구가 아직도 충분하지 않으며, 이것은 이상유동 현상의 복잡함에 기인한다. 이상유동에서의 파동전파에 대한 복잡한 현상을 이해하기 위해 먼저 간단한 이상유동 충격파관 문제에 대한 정확한 이해가 필요하다. 따라서 본 논문에서는 이상유동 충격파관 문

제에 대한 Exact Riemann 해법을, 특히 충격파의 강도가 작은 등엔트로피 유동의 가정 아래서 유도하였다. 본 연구에서 제시된 해법은 이상유동의 새로운 수치기법의 검증에 유용하게 사용될 수 있으며, 또한 이상유동에서의 파동 전파의 기본적인 특성을 이해하는데 도움을 준다.

2. 등엔트로피 공기-물 이상유동 충격파관

2.1 공기-물 충격파관 문제

이상유동에서의 충격파관 문제는 Fig. 1 에 보이는 것처럼 초기에 공기와 물이 격막으로 분리된 상태에 있다가 갑작스런 격막의 파괴로 인해서 물과 공기로 충격파, 팽창파, 접촉불연속면 등이 전파되어 나가는 현상을 묘사하는 것이다.

2.2 선형 상태방정식

공기와 물의 상태를 결정하기 위해서 상태방정식(Equation of State)이 필요한데, 여기서는 공기와 물을 모두 압축성으로 취급한다. 또한 두 유체는 모두 등엔트로피 상태라고 가정한다. 본 논문에서는 물과 공기 모두 같은 형태의 상태방정식을 사용한다. 등엔트로피 압축성 유체를 다루는 상태방정식으로

1 정회원, 한국과학기술원 기계항공시스템학부

2 종신회원, 한국과학기술원 기계항공시스템학부

* TEL : (042) 350-3711

* Corresponding author, E-mail: kschang@kaist.ac.kr

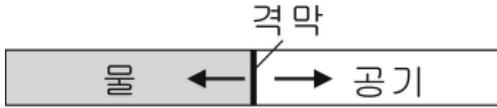


Fig. 1 물-공기 충격파관 문제의 개념도

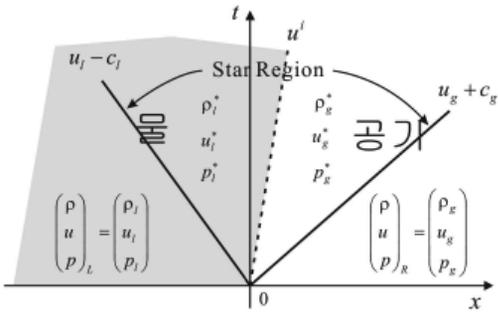


Fig. 2 Riemann 문제의 해법

는 Tait's 상태방정식[2] 선형상태방정식[3] 등이 사용되는데, 본 연구에서는 다음과 같은 선형상태방정식을 사용한다.

$$\rho_k = \rho_{k,0} + \frac{p_k - p_{k,0}}{c_k^2} \quad (1)$$

여기서 하첨자 $k(= l, g)$ 는 액체상과 기체상을 의미하며, c 는 음속을 의미한다. 본 연구에서 공기와 물에 대해 사용되는 상수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \rho_{g,0} &= 0 \text{ kg/m}^3, p_{g,0} = 0 \text{ Pa}, c_{g,0} = \sqrt{10^5} \text{ m/s} \\ \rho_{l,0} &= 1000 \text{ kg/m}^3, p_{l,0} = 10^5 \text{ Pa}, c_{g,0} = 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

3. 이상유동 Exact Riemann 해법

등엔트로피 상태의 두 유체가 속도 u^i 로 움직이는 물질경계면(material interface)를 기준으로 분리되어 있을 경우 각각의 유체는 단상 방정식으로 취급될 수 있다. 이 경우 Riemann 문제의 해법은 Fig. 2와 같이 도식적으로 나타낼 수 있다.

Exact Riemann 해법은 Star Region의 압력값으로부터 다른 변수들을 순차적으로 얻을 수 있으며 이때 사용되는 압력함수는 다음과 같이 주어진다.

$$f(p^*) \equiv f_L(\mathbf{U}_L p^*) + f_R(\mathbf{U}_R p^*) + u_R - u_L = 0 \quad (2)$$

여기서 왼쪽과 오른쪽 압력함수는 파동의 종류에 따라 다음과 같이 정의된다.

$$f_K = \begin{cases} f_K^{\text{shock}} & \text{if } p > p_K \\ f_K^{\text{rarefaction}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

3.1 충격파 관계식

만약 비선형 파가 충격파일 경우, 충격파를 사이에 두고 다음의 Rankine-Hugoniot 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} S_K(\rho^* K - \rho_K) &= \rho^* K u^* - \rho_K u^*, \\ S_K(\rho^* K u^* - \rho_K u_K) &= (\rho_K u^{*2} + p^*) - (\rho_K u_K^2 + p_K) \end{aligned}$$

여기서 $K = L, R$ 을 의미하고, S 는 충격파의 속도를 나타낸다. 이 식을 정리하면 다음과 같은 충격파에 대한 압력함수를 얻을 수 있다.

$$f_K(p^*) = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_K} - \frac{1}{\rho_{0K} + \frac{p^* - p_{0K}}{c_K^2}} \right) (p^* - p_K)} \quad (3)$$

3.2 팽창파 관계식

만일 비선형 파가 팽창파일 경우는, Riemann Invariants 가 성립하며, 등엔트로피 조건과 선형상태방정식을 사용하여 관계식을 유도할 수 있다. 유도된 식을 정리하면, 최종적으로 다음의 팽창파에 대한 압력함수를 얻을 수 있다.

$$f_K(p^*) = c_K \ln \left(\frac{\rho_{0K} + \frac{p^* - p_{0K}}{c_K^2}}{\rho_K} \right) \quad (4)$$

3.3 Star 영역에서의 압력과 속도

압력관계식 식 (2)은 Newton-Raphson법과 같은 반복법으로 풀어진다. 반복법으로 Star 영역에서의 압력 p^* 를 구하였다면, Star 영역의 속도 u^* 는 다음의 식으로 구할 수 있다.

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}\{f_R(p^*) - f_L(p^*)\} \quad (5)$$

3.4 전체영역에서 유동변수 샘플링

이렇게 구해진 Star 영역의 압력과 속도로부터 전체 영역에서의 유동 변수들은 해당 비선형파의 형태에 따라 Sampling 하면서 구해진다. Sampling 과정은 참고문헌[1]에 기술되어 있는 단상유동의 경우와 비슷하므로 여기서는 생략한다.

4. 계산결과

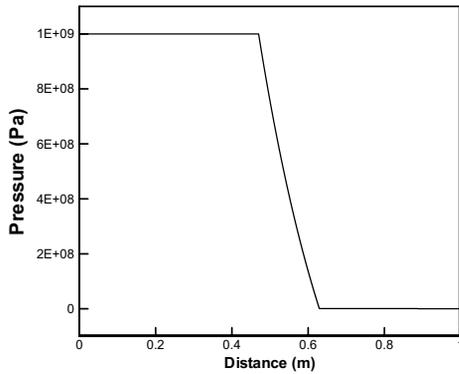


Fig. 3 공기-물 충격파문제결과: 압력

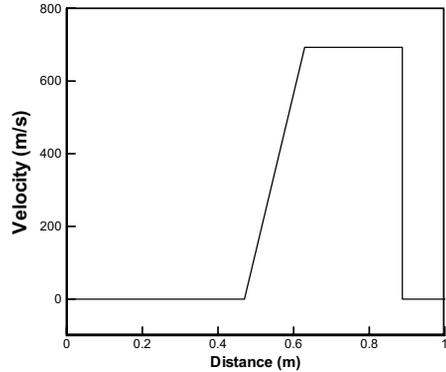


Fig. 5 공기-물 충격파문제결과: 속도

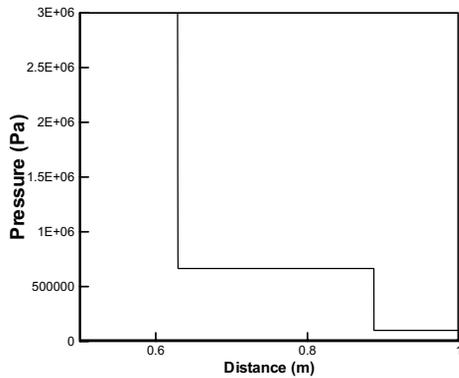


Fig. 4 공기-물 충격파문제결과: 압력(확대)

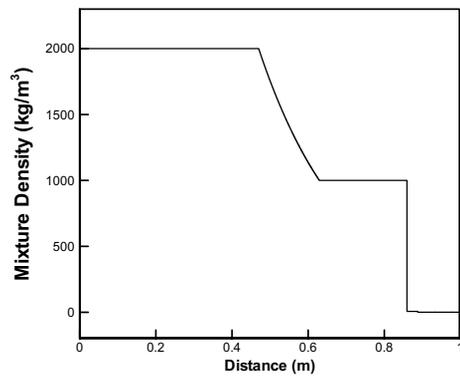


Fig. 6 공기-물 충격파문제결과: 혼합밀도

길이가 1 m 인 충격파관의 0.7 m 지점에 위치한 격막 좌우로 물과 공기가 분리되어 있다. 이때 초기 조건은 다음과 같다.

왼쪽(물):

$$p_L = 10^9 \text{ Pa}, \quad u_L = 0 \text{ m/s}$$

오른쪽(공기):

$$p_R = 10^5 \text{ Pa}, \quad u_R = 0 \text{ m/s}$$

Fig. 3-6는 격막이 파괴된 후 0.23 ms 에서의 결과를 보여 준다. 그림에서 왼쪽으로 진행하는 팽창파와 오른쪽으로 진행하는 물질경계면, 충격파를 볼 수 있다. 계산된 물질경계면의 속도는 692.5 m/s 이다. 이 문제에서 압력은 Fig. 3에서 보듯이 물에 발생하는 팽창파에 의해서 10^6 kPa 에서 660 kPa 까지 감소하며, 공기에서 발생하는 충격파에 의해서는 압력감소의 크기가 상대적으로 매우 작음을 알 수 있다(Fig. 4 참고). Fig. 5 에서 보여지듯이 유체의 속도는 물속으로 진행하는 팽창파로 인해 가속되고, 공기속으로는 충격파의 형태로

진파되어 나가며 충격파가 도달하기 전까지는 초기 정지된 상태를 유지하고 있다. 또한 혼합밀도에는 Fig. 6에서 보여지듯이 팽창파, 물질경계면, 충격파를 모두 볼 수 있으며, 팽창파와 물질 경계면 좌우의 밀도 차이는 거의 비슷하지만 충격파에 의한 밀도 감소는 매우 작음을 알 수 있다.

참고문헌

- [1] 1999, Toro, E.F., "Riemann Solver and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction," Springer-Verlag, Berlin.
- [2] 2003, Paillère, H., Corre, C. and Garcia Cascales, J.R., "On the Extension of the AUSM+ Scheme to Compressible Two-Fluid Models," *Comput. Fluids*, Vol.32, pp.891-916.
- [3] 2003, Evje, S. and Flåtten, T., "Hybrid Flux-Splitting Schemes for a Common Two-Fluid Model," *J. Comput. Phys.*, Vol.192, pp.175-210.