



Soroban grid 기반 CIP법을 이용한 자유표면 유동해석

임 호 남^{*1}

FREE SURFACE FLOW ANALYSIS BY SOROBAN GRID BASED CIP MEHTOD

H.N. Im^{*1}

In this study, we provide a comprehensive review of the CIP(Constrained Interpolation Profile/Cubic Interpolated Propagation) method with a pressure-based algorithm that is known as a general numerical solver for solid, liquid, gas and plasmas. And also we introduce a body-fitted grid system(Soroban grid) for computation of strongly nonlinear marine hydrodynamic problems such as slamming, water on deck, wave impact by green water. This grid system can keep the third-order accuracy in time and space with the help of the CIP method. The grid system consists of the straight lines and grid points. In the 2-dimensional grid case, each grid points moving in these lines like abacus - Soroban in Japanese. The length of each line can be different and the number of grid points in each line can be different. Mesh generation and searching of upstream departure point are very simple and possible to mesh-free treatment. To optimize computation of free-surface and multi-fluid flows, We adopt the C-CUP method. In most of the earlier computations, the C-CUP method was used with a staggered-grid approach. Here, because of the mesh free nature of the Soroban grid, we use the C-CUP method with a collocated-grid approach.

Key Words : CIP법, Soroban Grid, Body-Fitted, Free Surface

1. 서 론

최근 컴퓨터기술의 발전으로 컴퓨터시뮬레이션의 수요는 점점 높아지고 있다. 특히 복잡한 유동장의 취급에 대해서는 다양한 방법이 제안되어져 있고 주목할 만한 연구결과도 나오고 있는 것이 사실이나 컴퓨터 메모리의 과다사용, 격자생성의 어려움 등의 문제점이 있다. 본 논문에서는 해석합격자계의 한 가지 편리한 방법으로 soroban(주판, abacus) grid에 대하여 설명한다. 복잡한 유동장을 해석하기 위하여 제안되어진 방법으로는 크게 격자를 이용하는 방법과 입자를 이용하는 방법이 있다. 격자를 이용하는 방법은 cell이나 node로 전체의 장을 표현해야 하며 입자를 이용하는 방법은 각 입자가 물리량을 대표하며 유동장을 표현하는 특징이 있다. 이러한 복잡 유동장을 표현하는 수법으로는 Lagrange 보간이 대표적

수법이며 본 논문에서는 Yabe등[1]에 의해 1985년 발표되어진 CIP법을 이용한다[1-4]. CIP법은 공간 보간을 spline 보간과 비슷한 방법으로 Hermit 보간을 이용한다. spline 보간과의 차이점은 spline 보간은 보간식을 작성함에 있어 미분치의 연속조건을 이산점의 정보로부터 구하지만 CIP법에서는 공간미분치를 독립변수로 취급하기 때문에 spline 보간과 같은 미분의 연속조건을 구할 필요가 없으며 단순하게 물리적인 공간분포로부터 값과 미분치를 계산하는 방법이다. CIP법 이외에 이러한 물리변수를 독립하게 이용하여 하나의 물리량을 계산하는 수법으로 IDO법[5], CIP-CSL법[6], CIP-FVM법(VSIAM3)등의 새로운 수법이 개발되어지고 있다.

한편, 수치계산에 이용되어지는 격자계에 대하여 살펴보면 직교격자, 경계적합격자등이 있으며 경계적합격자는 비구조격자의 형태를 포함한다. 직교격자계는 복잡한 구조를 표현하기 위하여 많은 격자가 필요하며 이러한 문제를 보정하는 방법으로 AMR[7]법등이 개발되어지고 있다. AMR법은 직교격자를 부분적으로 세분화하여 격자해상도를 높여야 하는 공간에 배치하여 계산정도를 높이는 수법이다. 일반적인 물체적합격

1 정희원, 삼성중공업(주) 조선해양연구소

* TEL : (055) 630-8110

* Corresponding author, E-mail: hn.im@samsung.com



자계(일본곡선좌표계)는 격자의 좌표변환을 이용하여 계산을 수행하는데 좌표변환에 의한 계산정도의 저하를 줄이기 위하여 계산격자의 생성에 상당한 시간을 투여하여야 하는 단점이 있다. 본 논문에서 서술하는 soroban grid는 직교성을 유지하면서 물체적합 혹은 해석적합 격자의 생성을 가능하게 하는 새로운 격자 생성 수법이다. 이 수법은 격자계의 모양이 주판(abacus)과 같다고 하여 일본어로 주판을 뜻하는 soroban grid로 이름 붙여졌다.[3] 1차원 soroban grid는 단순하게 부등간격 격자를 이용하는 것과 같은 방법이며 2차원 soroban grid는 공간을 line과 각 line위를 움직이는 point로 표현한다. 2차원 격자의 line과 point로 이루어진 평면의 조합으로 3차원 공간 또한 쉽게 표현할 수 있다. 공간상에 초기 분포시킨 각 line과 그 위의 point는 매 time step마다 재배치되어 공간의 물리량을 표현한다. 예를들어 X축 방향으로 직선 line을 배치한다고 하면 $y_0 \sim y_m$ 의 line위에는 $x_0 \sim x_{n(y)}$ 의 point가 매 time step마다 각각 재배치되어 진다. 각 line상의 point의 개수는 변화시킬 수 있으며 line의 개수도 변화가 가능하다[4]. soroban grid는 상당히 많은 자유도를 가지고 있음에도 불구하고 격자표현은 모두 1차원 배열로 해결할 수 있으며 다차원 공간의 표현은 1차원 부등간격의 확장으로 생각하면 이해하기 쉽다.

본 논문에서는 CIP법 일반에 대하여 리뷰하고 soroban grid에 대하여 설명한다. 또한, 격자해상도를 자유롭게 조절할 수 있는 soroban grid와 3차정도를 유지하는 CIP법(Type-M)을 이용하여 multi-phase문제인 shock bubble과 free surface을 계산하는 방법에 대하여 설명한다.

2. CIP법

본 장에서는 CIP법에 대하여 간단히 설명하고자 한다. 함수 $f(x,t)$ 에 대하여 식 (2.1)과 같은 1차원 advection equation을 선택한다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

이는 단순한 파의 전파를 의미한다. 속도 u 가 일정한 경우 이 방정식의 해는 잘 알려진 바와 같이 식 (2.2)와 같이 표현할 수 있다.

$$f(x,t) = f(x-ut,0) \tag{2.2}$$

실제 계에서 속도 u 는 공간좌표 x , 시간 t 에 대하여 일정하지 않고 변화하지만 매우 짧은 시간 Δt 에 대하여 각

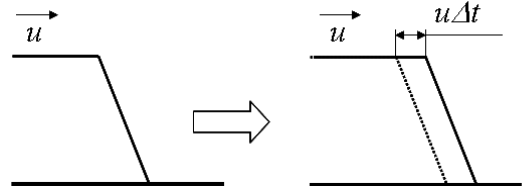


Fig. 2.1 Advection of physical property

격자점 x_i 상의 속도 u_i 는 각각 일정하다고 볼 수 있다. 따라서 식(2.2)를 이용하여 근사적으로 식 (2.3)으로 나타낼 수 있다.

$$f(x_i, t + \Delta t) \approx f(x_i - u_i \Delta t, t) \tag{2.3}$$

즉, Fig. 2.1에서 나타낸 바와 같이 어떠한 시간 t 에서 격자점 x_i 상의 물리량을 알고 있다면 Δt 후의 물리량은 식(2.3)으로 구할 수 있다.

2.1 Interpolation method with CIP법

CIP법은 값 f 와 공간 미계수 $g = \partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z \dots$ 를 사용하는 Hermite 보간을 사용한다. 식 (2.1)에 대한 공간 미분치는 식 (2.4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial x} g \tag{2.4}$$

여기서 g 는 f 의 미계수 즉 $g = \partial f / \partial x$ 이다. Fig. 2.2에 CIP보간법의 원리에 대하여 나타내었다. 주어진 값 f 및 그 미분치 g 에 대하여 공간상 2개의 point에서 cubic 다항식

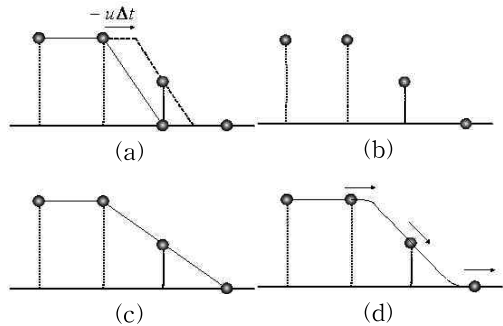


Fig. 2.2 The principle of CIP method : (a) solid line is initial profile and dashed line is an exact solution after advection, whose solution (b) at discretized points. (c) When (b) is linearly interpolated, numerical diffusion appears. (d) in the CIP, spatial derivative also propagates and the profile inside a grid cell is retrieved.

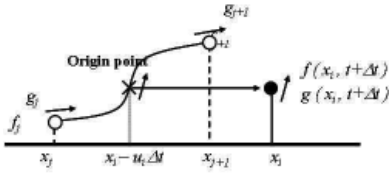


Fig. 2.3 Basic concept of CIP method.

$F(x) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ 로 두 점 사이의 profile을 기술하면 $n+1$ time step에서의 profile은 $u\Delta t$ 로 이동하는 것을 의미하며 $n+1$ time step에서의 값과 그 미계수는 각각 $f^{n+1} = F(x-u\Delta t)$, $g^{n+1} = dF(x-u\Delta t)/dx$ 와 같이 표시할 수 있다. 따라서 이들 값을 이용하여 $n+1$ time step에서의 보간 다항식을 식 (2.5)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 a_i &= (g_i + g_{iup})/D_2 + (2(f_i - f_{iup}))/D_3 \\
 b_i &= (3(f_{iup} - f_i))/D_2 - (2g_i + g_{iup})/D \\
 f_i^{n+1} &= a_i X^3 + b_i X^2 + g_i^n X + f_i^n \\
 g_i^{n+1} &= 3a_i X^2 + 2b_i X + g_i^n
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

여기서 $X = -u\Delta t$ 이며 상류점의 index는 $iup = i - \text{sign}(u_i)$ 으로 찾을 수 있고 격자간격 $D = -dx * \text{sign}(u_i)$ 이다. $\text{sign}(u_i)$ 는 u_i 의 조건에 따라 if $u_i \geq 0$ then $\text{sign}(u_i) = 1$ else $\text{sign}(u_i) = -1$ 와 같이 정의한다.

2.2 1차원 CIP법

식 (2.1)의 1차원 advection equation은 식 (2.6)과 같이 각각 값과 미분치의 이산식으로 기술하고 이를 식 (2.5)의 보간 다항식을 이용하여 푼다.

$$\begin{aligned}
 CIP1D(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\
 CIP1D(\partial f) &\equiv \frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

이에 대한 개념도를 Fig. 2.3에 나타내었다. Fig. 2.3과 같이 공간좌표가 i 인 어떠한 점의 값과 미분치는 이류원점 $x_i - u_i \Delta t$ 를 포함하고 있는 x_j 와 x_{j+1} 의 값, 미분치를 이용한 CIP 보간으로 구한다. 일반적으로 CFL조건에 맞는 Δt 를 사용하는 경우 j 는 i , $j+1$ 은 $i-1$ or $i+1$ 이 된다.

2.3 2차원 CIP법

2차원 문제에 대하여 CIP법을 적용하는 것은 directional Splitting이 가능한 CIP법을 사용하는 경우 1차원 문제의 단순 확장으로 생각할 수 있다. 여기서는 Type-C 및 Type-M의 directional splitting이 가능한 CIP법을 기준으로 설명한다. 예를 들면 X-방향의 보간을 행한 후 이들 결과를 이용하여 Y-방향에 대한 보간을 수행하는 순서로 2차원 문제를 풀 수 있다. 3차원 문제도 같은 방법으로 해결한다. X-방향의 보간을 행하는 단계에서 f , g_x 는 식 (2.5)를 이용하고 g_y 는 선형보간으로 해결하며 Y-방향의 보간을 행하는 단계에서는 X-방향의 보간결과를 이용하여 값 및 Y-방향 미분치는 CIP보간으로 X-방향 미분치는 선형보간으로 구한다. 2차원 Advection 방정식을 식 (2.7)에 나타내었다.

$$\begin{aligned}
 CIP2D &\equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = r \\
 \frac{\partial}{\partial x} CIP2D &= \frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} + v \frac{\partial f_x}{\partial y} = r_x - \frac{\partial u}{\partial x} f_x - \frac{\partial v}{\partial x} f_y \equiv R_x \\
 \frac{\partial}{\partial y} CIP2D &= \frac{\partial f_y}{\partial t} + u \frac{\partial f_y}{\partial x} + v \frac{\partial f_y}{\partial y} = r_y - \frac{\partial u}{\partial y} f_x - \frac{\partial v}{\partial y} f_y \equiv R_y
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

식 (2.6)에서는 non-advection phase의 값이 zero인 경우에 대하여 기술하였으나 식 (2.7)에서는 non-advection phase의 값이 r 이므로 이에 대하여 식 (2.8), 식 (2.9)과 같이 phase를 구분하여 푼다.

$$CIP2D(f, \partial_x f, \partial_y f) = 0 \tag{2.8}$$

$$CIP2D(f, \partial_x f, \partial_y f)_{non-adv.} = (r, R_x, R_y) \tag{2.9}$$

3. Soroban Grid

Soroban grid를 생성하기 위하여 1차원 monitor(weighting) 함수 $M(x, t)$ 를 정의한다. 이 함수는 공간상 어느 부분의 격자를 재배치하여야 하는지 판단하는 역할을 하는 함수이다. 이러한 목적으로 식 (3.1)과 같은 monitor 함수를 사용할 수 있으며 최근의 연구에는 보다 실용적인 monitor 함수도 제안되어지고 있다[4].

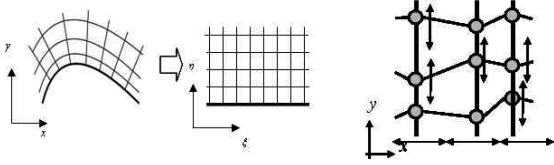


Fig. 3.1 (a) orthogonal curvilinear coordinate grid, (b) the concept of two-dimensional soroban grid

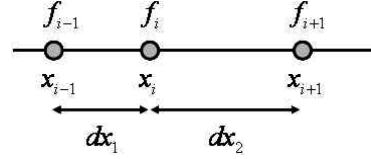


Fig. 3.3 one-dimensional non-uniform grid

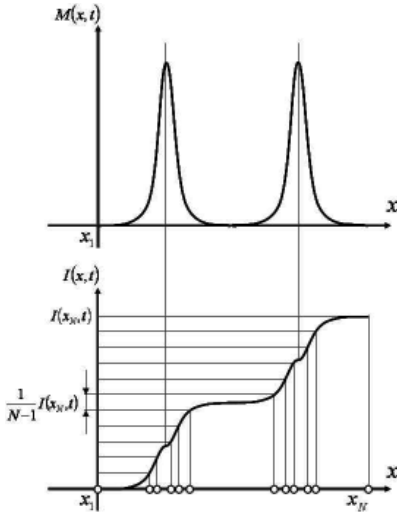


Fig. 3.2 (a) distribution of monitor function, (b) distribution of accumulated monitor function

$$M(x,t) = \sqrt{1 + \alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2} + \beta \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right| \quad (3.1)$$

여기서 α, β 는 scaling coefficients이며 ϕ 는 밀도, 속도, 압력과 같은 물리량을 나타내는 변수이다.

Fig. 3.1에 2차원 일반곡선좌표와 soroban grid의 차이를 나타내었다. 일반곡선좌표는 좌표변환을 수행하여 물체경계에 격자점을 배치하지만 soroban grid는 line과 point의 이동으로 물체경계 및 해석할 격자 배치를 수행한다. 최소 $M(x,t)$ 는 1로 식 (3.2)와 같은 형태로 간격비를 조정하여 monitor 함수를 재설정할 수 있다.

$$M(x,t) = \min \left(\sqrt{1 + \alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2} + \beta \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|, M_{\max} \right) \quad (3.2)$$

식 (3.2)의 monitor 함수를 식 (3.3)의 누적 monitor 함수 및 역함수를 이용하여 새로운 격자 분포를 생성하고 재배치 할 수 있다.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} M(x,t) dx = \frac{1}{2N} \sum_{j=2}^N \{ (M(x_{i-1},t) - M(x_i,t))(x_i - x_{i-1}) \} \quad (3.3)$$

식 (3.2)의 모니터 함수를 Fig. 3.2(a)와 같이 계산한다고 하면 Fig. 3.2(b) 및, 식 (3.3)의 누적모니터 함수를 이용하여 Fig. 3.2(b)의 x축과 같은 새로운 격자 재배치가 가능하게 되며 이를 이용하여 새로운 격자분포에서 유동장 계산을 수행한다.

3.1 1차원 부등간격 격자

1차원 soroban grid는 1차원 부등간격 격자와 동일하며 Fig. 3.3과 같은 부등간격 격자의 2차정도 차분식은 x_i 에 대한 Taylor전개를 이용하여 식 (3.4)와 같이 나타낸다.

$$\frac{df}{dx} \Big|_i = \frac{1}{dx_1 + dx_2} \left(dx_1 \frac{f_{i+1} - f_i}{dx_2} - dx_2 \frac{f_i - f_{i-1}}{dx_1} \right) \quad (3.4)$$

3.2 2차원 soroban 격자 생성법

2차원 격자의 재배치는 식 (3.5-7)을 통하여 수행할 수 있다.

$$M_x(x,y,t) = \sqrt{\left(1 + \alpha_x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2\right) + \beta_x \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|} \quad (3.5)$$

$$M_y(x,y,t) = \sqrt{\left(1 + \alpha_y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2\right) + \beta_y \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|} \quad (3.6)$$

$$ML_i(x_i,t) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{j=M} M_{x(i,j)}(x_i, y_{i,j}, t) \quad (3.7)$$

여기서, ML_i 는 line의 monitor 량의 평균치이다. 2차원 격자 재배치 순서를 아래에 간략하게 기술하면 아래와 같다.

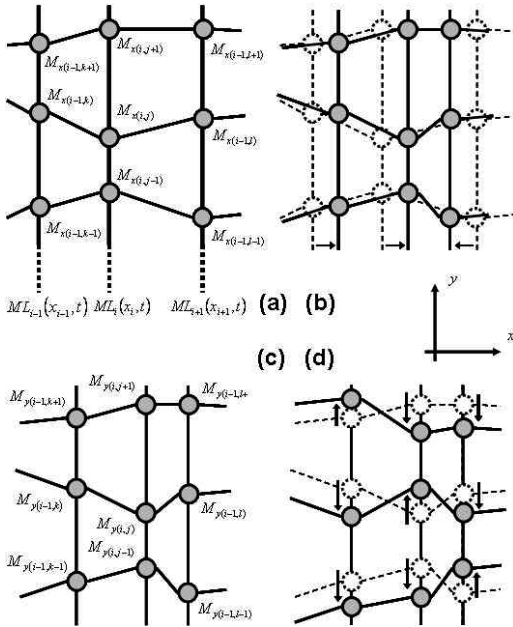


Fig. 3.4 Basic concept of soroban grid generation

- 각 라인을 따라서 $M(x,t)$ 을 계산한다. : Fig. 3.4(a)
- 각 라인을 정렬한다. : Fig. 3.4(b)
- 각 라인상의 $M(y,t)$ 를 계산한다. : Fig. 3.4(c)
- 라인위의 points 조정한다. : Fig. 3.4(d)

3.3 Soroban grid를 이용한 Type-M CIP법

다차원 CIP법은 directional splitting(Type-C, Type-M)을 하는 방법과 방향 분리하지 않고 직접 interpolation(Type-A, Type-B) 하는 방법으로 구분되어진다. 여기에 Type-C, Type-M 및 Type-A, Type-B의 차이는 미분치의 개수이며 본 논문에서 사용하려고 하는 Type-M은 공간 2차원에 대하여 f , ∂f_x , ∂f_y 와 같이 값과 방향 미분치를 사용하며 Type-C는 여기에 ∂f_{xy} 를 더하여 보간을 수행한다. 본 논문에서는 directional splitting 및 메모리 사용이 비교적 적은 Type-M을 사용하는 것으로 한다. Fig. 3.5에 directional splitting에 의한 CIP 보간에 대하여 나타내었다. 식(3.8)~(3.13)에 2차원 CIP 보간을 설명하였다. Fig. 3.5에 나타난 바와 같이 다음의 step1,2를 통하여 CIP법의 2차원 해석을 수행한다.

<advection phase>

Step 1.

$$A_{\xi,j} = CIP1D(f_{i,j}, \partial_x f_{i,j}, f_{i+1,j}, \partial_x f_{i+1,j}, x = \xi) \quad (3.8)$$

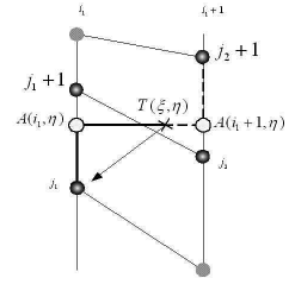


Fig. 3.5 The interpolated process of directional splitting schemes.(Type-M, Type-C)

$$\partial_x A_{\xi,j} = \frac{\partial}{\partial x} CIP1D(f_{i,j}, \partial_x f_{i,j}, f_{i+1,j}, \partial_x f_{i+1,j}, x = \xi) \quad (3.9)$$

$$\partial_y A_{\xi,j} = FDM1D(\partial_y f_{i,j}, \partial_y f_{i+1,j}, x = \xi) \quad (3.10)$$

여기서 $FDM1D$ 는 linear interpolation을 의미한다. Step 1.에서 이류원점이 존재하는 두 개의 라인상에 각각 CIP 및 linear interpolation을 수행한다.

Step 2.

$$T_{\xi,\eta} = CIP1D(A_{i,j}, \partial_y A_{i,j}, A_{i,j+1}, \partial_y A_{i,j+1}, y = \eta) \quad (3.11)$$

$$\partial_y T_{\xi,\eta} = \frac{\partial}{\partial y} CIP1D(A_{i,j}, \partial_y A_{i,j}, A_{i,j+1}, \partial_y A_{i,j+1}, y = \eta) \quad (3.12)$$

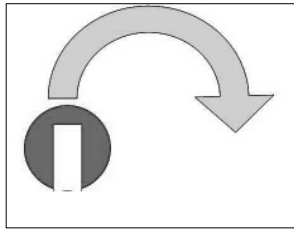
$$\partial_x T_{\xi,\eta} = FDM1D(\partial_x A_{i,j}, \partial_x A_{i,j+1}, y = \eta) \quad (3.13)$$

Step 2.를 수행한 이후의 각 값은 time step $(n+1)$ 의 값이 된다. 즉 $f_{i,j}^{n+1} = T_{\xi,\eta}$, $\partial_x f_{i,j}^{n+1} = \partial_x T_{\xi,\eta}$, $\partial_y f_{i,j}^{n+1} = \partial_y T_{\xi,\eta}$ 이다.

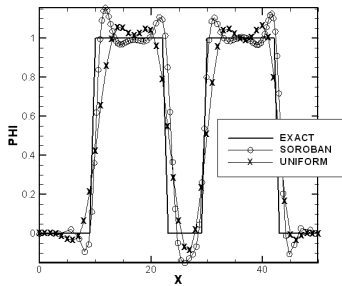
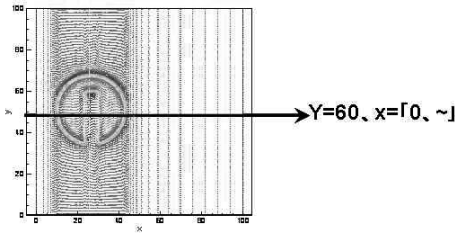
advection 속도가 일정한 값이 아닌 경우에는 식 (3.14)~(3.16)을 이용하여 non-advection phase의 값과 미분치를 계산한다.

<non-advection phase>

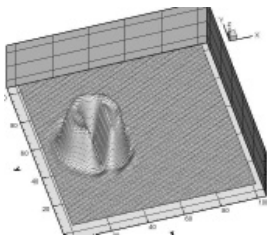
$$f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^* + g\Delta t \quad (3.14)$$



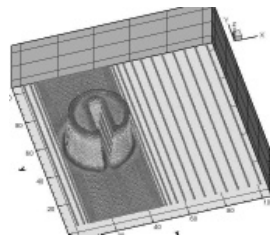
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 3.6 Zalesak problem: solid body rotation in two dimensions. (a)Initial Condition, (b) profile at Y=60, X=0 ~, (c)uniform grid, (d) soroban grid.

$$f_{x i,j}^{n+1} = f_{x i,j}^* + \frac{(f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1})}{2\Delta x} - \frac{f_{i+1,j}^* - f_{i-1,j}^*}{2\Delta x} - [(\partial u / \partial x) f_{x i,j}^* + (\partial v / \partial x)_{i,j} f_{y i,j}^*] \Delta t \quad (3.15)$$

$$f_{y i,j}^{n+1} = f_{y i,j}^* + \frac{(f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1})}{2\Delta y} - \frac{f_{i,j+1}^* - f_{i,j-1}^*}{2\Delta y} - [(\partial u / \partial y) f_{x i,j}^* + (\partial v / \partial y)_{i,j} f_{y i,j}^*] \Delta t \quad (3.16)$$

CIP법(Type-M)과 soroban grid를 이용하여 등간격 격자와의 비교를 행하였다. Fig. 3.6(a)에 2차원 zalesak 문제의 초기조건을 표시하였다.

1회전후의 Y=60 라인의 profile 및 등간격 격자와의 결과 비교를 Fig. 3.6(b)에서 Fig. 3.6(d)에 나타내었다. Fig. 3.6(b) ~ (d)에서 보는 바와 같이 soroban grid를 이용한 계산결과는 360°(1회전후)에도 해의 확산이 아주 적다는 것을 알 수 있으며 격자가 해의 분포를 따라 집중적으로 채배치되어 공간해상도가 높은 계산이 수행되고 있음을 알 수 있다.

4. Soroban Grid를 이용한 유동계산

4.1 기초방정식

지배방정식은 Navier-Stokes 방정식, 시간발전형 압력방정식 및 밀도와 밀도함수의 질량보존식이다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + Q_u \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p = -\rho C_s^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = -\rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi_i = -\phi_i (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (4.4)$$

여기서, ρ 는 밀도, ϕ_i 는 각 i 상의 밀도함수, Q_u 는 점성, 응력, 중력, 표면장력 등으로 구성되는 항, C_s^2 는 음속으로 비열비를 이용하여 $c_s^2 = \gamma p / \rho$ 로 정의한다. 식 (4.1-4.4)의 지배방정식에 대하여 압력에 관한 poisson방정식을 풀 필요가 있다. 본 논문에서는 C-CUP(CIP method and Combined Unified Procedure)법을 채용한다. 지배방정식은 Fractional-time step법을 적용하여 non-advection, advection으로 분리하며 advection phase에 대하여 CIP 보간을 non-advection phase의 압력계산에는 SMAC형의 poisson방정식을 푸는 것으로 한다. non-advection phase에 대하여는 식 (4.1)을 식 (4.2)에 대입하여 정리하면 식 (4.5)와 같은 압력에 관한 Poisson방정식이 유도되어진다.

4.2 CCUP법

CIP법에서는 지배방정식을 advection phase와 non-advection

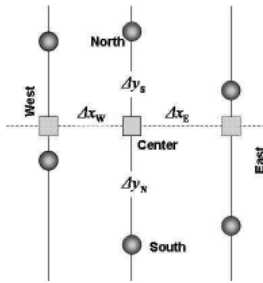


Fig. 4.1 Co-located grid rearrangement for poisson equation

phase로 분리하여 각각을 구분하여 계산한다. 원래 지배방정식이 비보존계에서 서술되어 있기 때문에 advection항과 non-advection항으로 분리하는 것은 비교적 용이하다. advection항에 관한 해법은 앞에서 서술한 방법으로 진행한 후 식 (4.5) ~ (4.8)을 이용하여 non-advection phase의 계산을 수행한다.

$$\nabla \left(\frac{\nabla p^*}{\rho} \right) = \frac{p^* - p^n}{\rho^n C_s^2 \Delta t^2} + \frac{\nabla \mathbf{u}^n}{\Delta t} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n - \frac{1}{\rho^n} \nabla p^* \Delta t \quad (4.6)$$

$$\rho^* = \rho^n + \frac{(p^* - p^n)}{C_s^2} \quad (4.7)$$

$$F^* = F^n + F^n \frac{(p^* - p^n)}{\rho^n C_s^2} \quad (4.8)$$

CCUP법은 압력 base해법이므로 압력을 먼저 계산하여 속도, 밀도, 밀도함수를 계산하는 순서를 취한다. 식 (4.5)는 반복법을 이용하며 흔히 SOR법, Bi-CGSTAB법등을 이용할 수 있다. 본 논문에서는 poisson방정식의 해법으로 Bi-CGSTAB법을 채용하였다. Fig. (4.1)에 soroban grid에서 압력방정식을 유도하는 방법에 대하여 나타내었다. Fig. 4.1에 나타낸 것과 같이 압력계산점 Center에 대하여 line상(Y방향)의 구배에 대해서는 일반적인 부등간격 격자의 차분식을 사용하고 line간(X방향)의 값은 각 West, East line선상에서 보간 한 값을 이용한다.

4.2 밀도함수

본 논문에서는 식 (4.4)의 밀도함수를 이용하며 상간의 경계를 보다 정확하게 경계포획을 하기 위한 방법으로는 식 (4.9)와 같이 tangential 변환을 수행한다. 식 (4.9)의 H는 보다

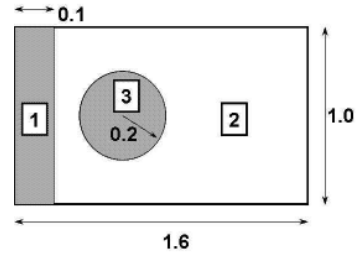


Fig. 4.2 Initial condition of shock bubble

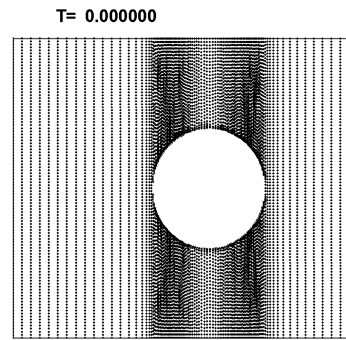


Fig. 4.3 Initial grid distribution : shock bubble

sharp한 interface를 포획할 수 있게 해주며 ϕ_i 의 값이 필요할 경우에는 식(4.10)과 같이 역변환 하여 사용하면 된다.

$$H = f(\phi) = \tan(c\pi(\phi - 0.5)) \quad (4.9)$$

$$\phi = \text{atan}(f(\phi)) / (c\pi) + 0.5 \quad (4.10)$$

4.3 압축성 유동

본 논문에서 soroban grid의 적용을 시험하고자 하는 문제는 상간의 경계를 정확히 포획하는 것이 중요한 multi phase flow이다. 압축성 유동에 문제에서는 Fig. 4.2에 초기조건으로 표시한 것과 같은 shock bubble 문제를 동일한 격자수의 등간격 격자를 사용한 결과와 비교하였다.

Fig. 4.2의 비열비, 밀도, 압력, 속도의 초기조건은 각각 (① 1.4, 1.0, 10, 0), (② 1.4, 1.0, 1, 0), (③ 1.6, 0.1, 1, 0)이다. post shock 으로부터 압력파가 bubble 방향으로 전달되는 조건으로 설정하였다. Fig. 4.3은 초기 격자 분포를 나타내고 있다. Fig. 4.4는 post shock ①이 bubble ③을 지나기 직전의 bubble주위의 격자분포, 밀도의 contour를 나타내고 있다. 그림에서 직관적으로 확인할 수 있는 바와 같이 bubble 주위에 격자를 조밀하게 배치하여 bubble의 경계를 예리하게 포획하고 있는 것을 알 수 있다.

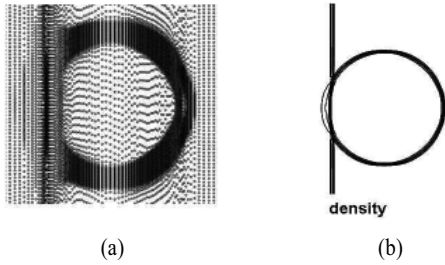


Fig. 4.4 (a) grid distribution, (b) contour of density

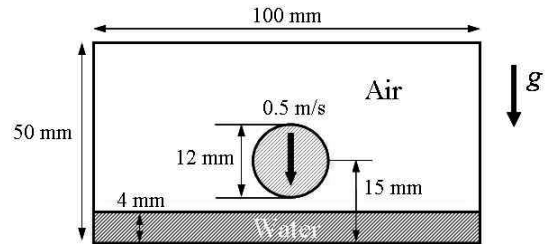


Fig. 4.6 Initial condition of water drop

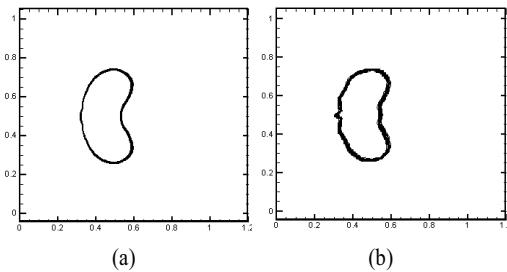


Fig. 4.5 (a)with soroban grid, (b) with uniform grid , t=0.69

Fig. 4.5는 shock wave가 bubble을 지나간 직후 밀도함수의 분포를 나타내고 있다. soroban grid와 등간격 격자의 공간해상도를 비교하기 위한 것으로 두 개 경우 동일하게 160x100의 동일한 격자수로 계산하였다.

4.4 비압축성 유동

다음으로 비압축성 유동의 문제에 있어서 경계의 포획이 중요한 문제가 되는 사례로 water drop의 초기조건을 Fig. 4.6에 나타내었다. 물-공기의 two phase 문제와 같이 밀도차가 아주 큰 유동장에서 phase의 경계를 정확히 포획하는 것은 아주 어려운 문제이다.

soroban grid를 이용하는 case의 격자수는 100x50으로 하였으며 등간격 격자를 이용하는 case는 soroban 격자의 최소 격자간격과 맞추기 위하여 250x126으로 계산하였다. Fig. 4.7은 초기 격자배치를 나타내고 있고 Fig. 4.8에 등간격 격자를 사용한 case와 soroban grid를 사용한 case의 밀도함수를 나타내었다. 거의 동일한 profile을 보이는 것처럼 보이지만 등간격 격자의 격자수는 soroban 격자의 약 6배의 격자를 사용하여 해석한 결과임에 주목해야 한다.

Fig. 4.9에 나타난 바와 같이 soroban grid를 사용한 case에서는 phase의 경계에서 격자밀도가 높게 분포되어 경계 포획에 효과적임을 알 수 있다.

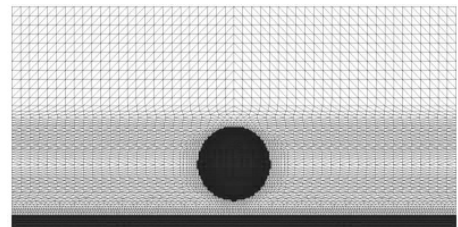


Fig. 4.7 grid distribution: water drop

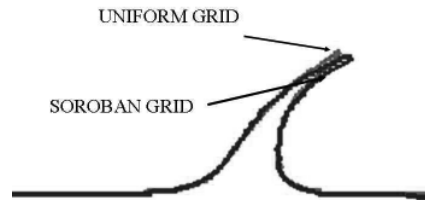


Fig. 4.8 compare with 2 cases : density function

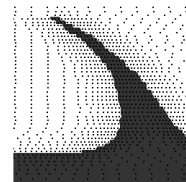


Fig. 4.9 grid distribution around phase interface

5. 결 론

Free surface를 포함하는 multi-phase 문제는 상(phase)간의 경계를 정확하게 capture하는 것이 중요하다. water drop의 계산 사례에서 보인 바와 같이 공간상의 해의 분포는 변화하고 이 분포에 따라 격자를 재배치하는 것은 용이하지 않다. 해석



합격자인 soroban grid와 3차정도 해법인 CIP법을 이용하여 free surface의 interface부에 효율적인 격자 재배치로 고정도, 고공간해상도 계산이 가능함을 보였다. 동일한 free surface를 해석함에 있어서 등간격 격자에 비해 보다 적은 격자수로도 정도 좋은 해석이 가능하다는 것을 보였다.

참고문헌

- [1] 1985, Yabe, T., "Cubic Interpolated Pseudo-particle Method (CIP) for Solving Hyperbolic-Type Equations," in *Journal of Computational Physics, Academic Press*, Vol.61, pp.261-268.
- [2] 2001, Yabe, T., "The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis," in *Journal of Computational Physics, Academic Press*, Vol.169, pp. 556-593.
- [3] 2004, Yabe, T., "Higher-order schemes with CIP method and adaptive Soroban grid towards mesh-free scheme," in *Journal of Computational Physics, Elsevier B.V*, Vol.194, pp. 57-77.
- [4] 2006, Takizawa, K., "Computation of Free-surface flow and Fluid-Object Interactions with the CIP Method Base on Adaptive Meshless Soroban grid," World Congress on Computational Mechanics, Los Angeles, USA.
- [5] 1997, Aoki, T., "Interpolated Differential Operator (IDO) scheme for solving partial differential equations," *Comput. Phys. Commun.*, vol.102, p.132.
- [6] 2000, Tanaka, R., Nakamura, T. and Yabe, T., "Constructions an exactly conservative scheme in a non-conservative form," *Comput. Phys. Commun.*, vol.126, p.230.
- [7] 1984, Berger, M.J.and Olinger J., "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations," *J. Comput. phys*, vol.53, pp.484-512.