



수정된 CIP방법을 이용한 벽면 충돌 후 액적의 퍼짐 현상에 대한 수치해석 연구

손 소 연,¹ 고 권 현,² 이 성 혁,³ 유 흥 선^{*3}

Numerical Study on Droplet Spread Motion after impingement on the wall using improved CIP method

S.Y. Son,¹ G.H. Ko,² S.H. LEE³ and H.S. Ryou^{*3}

Interface tracking of two phase is significant to analyze multi-phase phenomena. The VOF (Volume of Fluid) and level set are well known interface tracking method. However, they have limitations to solve compressible flow and incompressible flow at the same time. CIP (Cubic Interpolate Propagation) method is appropriate for considering compressible and incompressible flow at once by solving the governing equation which is divided up into advection and non-advection term. In this article, we analyze the droplet impingement according to various We number using improved CIP method which treats nonlinear term once more comparison with original CIP method. Furthermore, we compare spread radius after droplet impingement on the wall with the experimental data and original CIP method. The result using improved CIP method shows the better result of the experiments, comparison with result of original CIP method, and it reduces the mass conservation error which is generated in the numerical analysis comparison with original CIP method.

Key Words : 다상유동(Multi-phase flow), CIP법(Cubic interpolated propagation method), 비엇갈림 격자계(Non-staggered grid), 액적 퍼짐 (Droplet spreading), We수 (Weber number)

1. 서 론

다상현상유동은 각종 보일러, 응축기, 공기조화 장치, 원자력 발전소 및 자동차, 항공기 해석 등에 사용되는 중요한 열유체 현상이다. 이러한 현상은 두 개 이상의 상 사이에 급격한 밀도 변화를 수반하기 때문에 상경계면 해석이 매우 중요하다. 상경계면을 해석하는 방법으로 경계포착법(interface tracking method)이 있다.

대표적인 경계포착법으로는 VOF법(Volume of Fluid)[1]과 level set[2] 방법이 있다. VOF법은 인접 검사 체적 사이의 유동을 고려하여 경계면을 찾는 방법으로 상 사이의 질량 보존이 잘 된다는 장점이 있지만 경계면 처리과정이 복잡하여 3차원으로 확장이 어렵다는 단점이 있다. Level set 방법은 거리

의 함수를 이용하여 경계면을 찾는 방법으로 VOF법에 비해 더 정확한 상 경계면을 찾을 수 있다는 장점을 갖고 있는 반면 좀 더 명확한 경계면을 찾기 위해서는 추가적인 처리가 필요하고, 수치 확산이 크다는 단점이 있다. 기존의 수치해석 기법들의 단점을 보완한 방법으로는 Yabe에 의해 개발된 CIP(Cubic Interpolate Propagation)법[3-7]이 있다. CIP법은 열유동 방정식을 풀 때 오차가 큰 대류항을 3차 스플라인 보간법을 이용하여 계산함으로써 기존의 수치기법에 비해 좀 더 정확한 상경계면을 추적할 수 있으며, 압축성 유동과 비 압축성을 동시에 고려 할 수 있는 통합 해법이다. 또한 비 엇갈림 격자계(non-staggered grid)를 이용한 CIP법의 경우 엇갈림 격자계(staggered grid)를 사용한 일반 유동 해석기법에 비해 3차원으로 확장이 용이하다는 장점을 갖고 있다. 하지만 기존 CIP법의 경우, 대류항을 처리하는데 일부 미지수 값을 갖고 있는 값들로 처리하는 가정을 사용함으로써 오차가 발생한다.

따라서 본 연구에서는 기존 CIP법의 단점을 보완하기 위해 비선형 부분인 대류항의 계산을 반복 수행하는 수정된

1 정회원, 중앙대학교 공과대학 기계공학부

2 중앙대학교 건축소방행정학과

3 종신회원, 중앙대학교 공과대학 기계공학부

* Corresponding author, E-mail: cfdmcc@cau.ac.kr

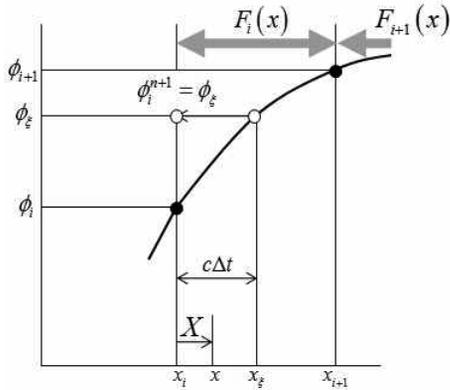


Fig. 1 Principle of spline interpolation

CIP법을 개발하고자 한다. 또한 본 연구의 정확성을 검증하기 위해 벽면 충돌 후, 액적 퍼짐 현상을 We수 변화에 따라 수정된 CIP법을 이용하여 해석하고 기존 CIP방법을 이용한 수치해석결과 및 실험을 통한 결과 값과 비교, 분석을 통해 정확도를 검증하였다.

2. 수치 이론

2.1 CIP법의 기본 이론

CIP법의 원리를 설명하기 위해 1차원 파동방정식을 고려하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

CIP법은 Fig. 1과 같이 x_i 과 x_{i+1} 사이의 임의의 점인 x_x 값을 3차 스플라인 보간법을 이용해서 구하는 방법으로, 시간이 $t + \Delta t$ 인 경우에 i 번째 격자에서의 값인 ϕ_i^{n+1} 값을 구하면 다음과 같다.

$$\phi_i^{n+1} \equiv \phi(x_i, t_{n+1}) \equiv \phi(x_i - c\Delta t, t_n) \quad (2)$$

3차 스플라인 보간법을 이용해서 값을 구할 때는 함수 및 1차도함수, 2차 도함수 연속성을 보장해야 한다. 하지만 2차 함수의 연속성까지 고려할 경우 계산이 복잡해지므로 CIP법의 경우 개선된 스플라인 보간법을 사용한다. 식 (1)에 x 에 대한 공간 미분을 취하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + c \frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

여기서 $\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ 이다

식 (2)와 동일한 형태로 공간미분 한 파동방정식에서 시간 $t + \Delta t$ 경우, i 번째 격자에서 값인 ϕ_i^{n+1} 값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_i^{n+1} \equiv \phi'(x_i, t_{n+1}) \equiv \phi'(x_i - c\Delta t, t_n) \quad (4)$$

이를 통하여 기존 스플라인 보간 함수 계산의 복잡성을 해결할 수 있다.

2.2 2차원 CIP법

2차원 유동방정식을 고려하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$u < 0, v < 0$ 하고, $\Delta x, \Delta y$ 가 일정할 경우 4점을 이용한 3차 스플라인 함수를 구할 수 있다.

$$F_{i,j} = [(A1_{i,j} + A2_{i,j}Y + A3_{i,j}) + A4_{i,j}Y + \partial_x \phi_{i,j}]Y + [(A5_{i,j}Y + A6_{i,j}X + A7_{i,j})Y + \partial_y \phi_{i,j}]Y + \phi_{i,j} \quad (6)$$

각각의 계수들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A1_{i,j} &= [-2d_{i,j} + \partial_x(\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j})\Delta x] / \Delta x^3 \\ A2_{i,j} &= [A8_{i,j} - \partial_x d_j \Delta x] / (\Delta x^2 \Delta y) \\ A3_{i,j} &= [3d_{i,j} - \partial_x(\phi_{i+1,j} + 2\phi_{i,j})\Delta x] / \Delta x^2 \\ A4_{i,j} &= [-A8_{i,j} + \partial_x d_j \Delta x + \partial_y f_i \Delta y] / (\Delta x \Delta y) \\ A5_{i,j} &= [-2d_j + \partial_y(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j})\Delta y] / \Delta y^3 \\ A6_{i,j} &= [A8_{i,j} - \partial_y d_i \Delta y] / (\Delta x \Delta y^2) \\ A7_{i,j} &= [3d_j - \partial_y(\phi_{i,j+1} + 2\phi_{i,j})\Delta y] / \Delta y^2 \\ A8_{i,j} &= \phi_{i,j} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $X = x - x_{i,j}$, $Y = y - y_{i,j}$, $d_i = \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}$, $d_j = \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}$ 이다.

2.2.1 비대류 단계

CIP법은 비대류단계와 대류단계로 나뉘어서 계산한다. 우선, 비대류단계를 다음과 같이 계산 할 수 있다.

$$\phi_{i,j}^* = \phi_{i,j}^n + g_{i,j} \Delta t \quad (8)$$



$$\begin{aligned} \partial_x \phi_{i,j}^* &= \partial_x \phi_{i,j}^n - \frac{\phi_{i+1,j}^* - \phi_{i-1,j}^* - \phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \\ &\quad - \partial_x \phi_{i,j}^n \frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})\Delta t}{2\Delta x} \\ &\quad - \partial_y \phi_{i,j}^n \frac{(v_{i+1,j} - v_{i-1,j})\Delta t}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \partial_y \phi_{i,j}^* &= \partial_y \phi_{i,j}^n - \frac{\phi_{i,j+1}^* - \phi_{i,j-1}^* - \phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ &\quad - \partial_x \phi_{i,j}^n \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})\Delta t}{2\Delta x} \\ &\quad - \partial_y \phi_{i,j}^n \frac{(v_{i,j+1} - v_{i,j-1})\Delta t}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (10)$$

2.2.2 대류 단계

대류단계에서는 비대류 단계에서 구한 $\phi_{i,j}^*, \partial_x \phi_{i,j}^*, \partial_y \phi_{i,j}^*$ 을 이용하여 새로운 값인 $\phi_{i,j}^{n+1}, \partial_x \phi_{i,j}^{n+1}, \partial_y \phi_{i,j}^{n+1}$ 을 구한다.

2.3 CCUP법

CCUP(CIP-Combined Unified Procedure)법은 일반적인 열유동 방정식을 풀기위한 CIP 해법이다. 지배방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + Q_u \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} + \tilde{Q}_E \quad (13)$$

여기서, Q_u 은 중력, 부력등 체적력을 나타내는 항이며 \tilde{Q}_E 은 복사에너지 등을 나타내는 항이다. CCUP법은 크게 2단계인 대류단계와 비대류단계로 나뉘서 계산한다. 대류항의 경우 CIP법을 이용하여 계산하고, 비대류항의 경우 일반적인 차분법을 이용한다.

2.3.1 대류항

3차 스플라인 함수를 이용한 CIP법을 이용하여 대류항을 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{\rho^* - \rho^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \rho^n = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n = 0 \quad (15)$$

$$\frac{p^* - p^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla p^n = 0 \quad (16)$$

다음 과정을 통해 $\rho^*, \mathbf{u}^*, p^*$ 값을 구하고, 이 값을 이용해서 비대류항 부분을 계산할 수 있다.

2.3.2 비대류항

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t} = -\rho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \quad (17)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^*} + Q_u^* \quad (18)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} = -\rho^* c_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \quad (19)$$

비대류항은 대류항에서 구한 $\rho^*, \mathbf{u}^*, p^*$ 을 가지고 계산을 수행한다. 식(17)을 보면 압력과 속도 둘 다 새로운 시간 단계인 $n+1$ 값이므로 계산하기 힘들다. 이를 해결하기 위해 비대류항은 예측단계, 수정단계(predictor-corrector)로 나눠 계산을 수행한다.[9]

예측단계 (predictor step)

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^*}{\rho^*} + Q_u^* \quad (20)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\frac{\nabla \delta p}{\rho^*} \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^*} \nabla \delta p \right) = \frac{1}{\rho^* c_s^2 \Delta t^2} \delta p + \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (22)$$

여기서, $\delta p = p^{n+1} - p^*$ 이다. $\tilde{\mathbf{u}}$ 은 예측된 값을 의미하는 것으로 대류항에서 구한 값과 양해법을 통해 구할 수 있다. 식 (21)를 이용해서 식 (22)과 같은 압력 수정에 대한 푸아송방정식(poisson equation)을 구할 수 있다.

수정단계(corrector step)



$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}} - \frac{\Delta t}{\rho^*} \nabla \delta p \quad (23)$$

$$\rho^{n+1} = \rho^* - \rho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \Delta t \quad (24)$$

$$p^{n+1} = p^* + \delta p \quad (25)$$

수정단계에서는 예측단계에서 구한 $\delta p, \rho^*, \tilde{\mathbf{u}}$ 등을 이용하여 새로운 값인 $\mathbf{u}^{n+1}, \rho^{n+1}, p^{n+1}$ 을 구하고, 한 시간단계의 계산이 모두 끝난 후 이 값들을 다음 시간 단계의 값으로 넘겨준다.

2.4 수정된 CIP

수정된 CIP법은 기존 CIP법의 대류항 부분을 반복 계산한 방법이다. 이는 식(14)-(16)에서 시간에 대해 차분화 한 부분의 $\rho^*, \mathbf{u}^*, p^*$ 을 제외하고 나머지 항들은 기존의 시간 단계 값을 이용하여 계산함으로써 발생하는 질량 보존의 오차를 줄이기 위한 방법으로 대류항 부분을 반복 계산하여 $\rho^n, \mathbf{u}^n, p^n$ 값과 구하고자하는 새로운 시간 단계의 값인 $\rho^*, \mathbf{u}^*, p^*$ 의 차이를 최대한 줄였다. 이 같은 방법은 새로운 값과 기존의 값 사이의 차이를 줄임으로써 실제 지배방정식을 푸는 것과 근사한 결과를 도출할 수 있다.

3. 수치해석 결과 및 고찰

3.1 해석모델과 경계조건

다상유동을 해석하는데 있어 액적퍼짐 현상은 압축성 유동과 비압축성 유동을 동시에 다루는 방법으로 대표적인 다상 유동 현상 중 하나이다. 본 연구에서는 We(weber)수 변화에 따른 수정된 CIP법의 결과 값을 기존의 CIP법을 이용한 결과

Table 1 Fluid properties

	water	air
viscosity $\mu [N \cdot s/m^2]$	0.899×10^{-3}	1.8×10^{-5}
surface tension, σ [N/m]	72×10^{-3}	72×10^{-3}
density $\rho [Kg/m^3]$	997	1.25
speed velocity $C_s [m/s]$	1481	343.3

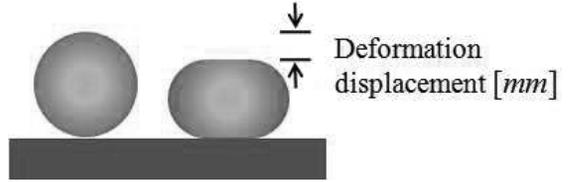


Fig. 2 Deformation displacement

값을 비교하였다. 또한 실험을 통해 나온 액적 퍼짐 형상을 시간 진행 단계별로 나눠서 비교하였다. 해석을 위한 경계면 처리를 위하여 격자의 4면은 벽면으로 처리하였고, 160×40 의 균일한 격자를 사용하였다. 동일한 크기의 액적은 실험에서 구한 수치를 이용하여 We수 변화에 따라 각기 다른 위치에서 떨어트렸고, 그 높이는 Table 2에 나타나 있다.

3.2 액적 퍼짐의 비교

액적의 변형 속도는 각 단위 시간당 액적의 변형길이를 의미하며 Fig. 2와 같이 나타낼 수 있다. Fig. 3, 4은 벽면 충돌 후 액적의 변형속도에 대한 그래프로 기존 CIP법과 수정된 CIP법의 수치해석 결과를 실험값과 비교하였다. x방향의 변형 속도 경우, 기존 CIP법 경우 시간이 진행됨에 따라 속도의 변화 정도가 크게 나타난 것에 반해, 수정된 CIP법을 사용한 경우 안정된 속도의 변화를 나타내었고, 실험값에 더 유사한 값을 얻을 수 있었다. Fig. 4에 나타난 y축 변형 속도의 경우 액적이 벽면에 충돌 한 후 6ms가 지난 후부터 실험의 변형속도가 수정된 CIP법과 근사한 값을 띄었다. 하지만 x축의 변형 속도 경우, 액적의 퍼짐 현상이 진행되고 2-6ms동안 실험값은 수치 해석 값과 차이를 보였는데 이는 동적 접촉각(Dynamic Contact Angle)의 영향 때문이다. 벽면 충돌 후 액적의 퍼짐 현상에 대해 실험과 수정된 CIP법을 통해 얻은 형상을 비교하면 Table3과 같이 시간의 변화에 따라 We=1과 We=3인 두 경우에 대해 보여 준다. 여기서 수정된 CIP법을 이용하여 구한 수치 해석 값은 왼쪽 형상이고, 실험값은 오른쪽 형상이다. 두 결과 값은 유사한 형상을 나타내고 있다. 하지만 수정된 CIP법을 통해 구현한 형상의 경우 벽면과의 접촉 부분에서 실험값과 차이를 보인다. 이러한 현상 또한 앞에서 언급한 동적 접촉각의 고려 유무로써 설명 할 수 있다. 본 연구에서

Table 2 Height and impact velocity at We=1 and 3

	We=1	We=3
Height $h [m]$	1.84×10^{-3}	5.52×10^{-3}
impact velocity $v [m/s]$	0.19	0.329

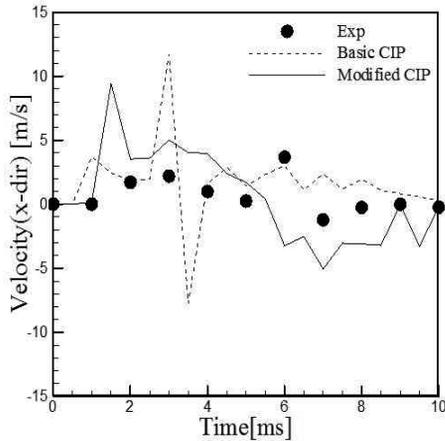


Fig. 3 Comparison of impact velocity(x-dir) for We=1 for 10ms

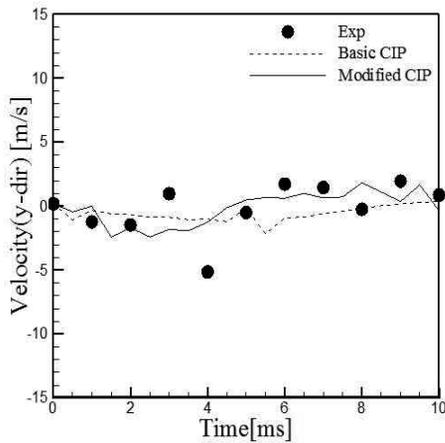


Fig. 4 Comparison of impact velocity(y-dir) for We=1 for 10ms

는 액적의 퍼짐 현상에서 정적 접촉각(Static Contact Angle)만을 고려하고 동적 접촉각을 고려하지 않았다. 동적 접촉각의 경우 나아가는 각도(Advancing angle)과 되돌아가는 각도(Receding angle)로 나타내질 수 있는데 두 각도의 차이로 인해 에너지 손실이 발생되게 된다. 이는 Fig. 4에서 액적의 퍼짐이 진행되는 앞쪽부분에서 수치해석의 경우 액적변형속도가 실험값보다 더 크게 나타나는 것과 연관 지어 볼 수 있다. 본 연구의 경우 동적 접촉각 변화에 따른 액적의 에너지 손실이 고려되지 않아 실제 현상에 비해 액적이 갖고 있는 에너지가 더 크게 된다. 이러한 속도는 액적이 x방향으로 퍼지는 데 기인하게 되어 수치해석의 값이 더 크게 나타나게 된다. 또한 본 연구는 2차원 유동을 다루므로써 실제 3차원 현상에서 중요하게 고려되는 3중선(Three Phase Contact Line)을

3중점(Three Phase Contact Point)로 가정 하였다.

3.3 기존 수치해석과의 오차 비교

Fig. 5는 수치 해석시 발생하는 질량 보존과 관련된 오차에 대해 기존 CIP법과 수정된 CIP법의 결과를 비교한 그래프이다. 질량 보존의 오차는 초기 액적의 질량에 대한 해석 진행에 따른 변화되는 액적의 질량을 비교한 것으로 수정된 CIP법을 이용한 경우 기존 CIP법에 비해 해석이 진행되면서 오차가 빠르게 감소하는 것을 확인 할 수 있다. 이는 수정된 CIP법의 경우 반복 계산을 함으로써 각 증분 단계에서 결과 값 사이의 차이가 줄음으로써 전체적인 질량보존의 오차가 감소하는 데서 기인한다. Table 4는 액적의 충돌 속도를 나타

Table 3 Comparison of deformation at We=1 and 3

	We=1	We=3
		1mm
0ms		
3ms		
5ms		
10ms		

Table 4 impact velocity for We=1

	Exp	Basic CIP	Modified CIP
impact velocity [m/s]	0.19	0.094	0.11

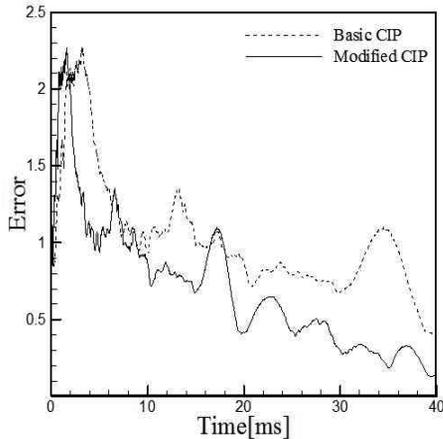


Fig. 5 Comparison of errors for We=1 for 4ms

낸 것으로 수정된 CIP법의 충돌 속도와 기존 CIP법의 충돌 속도는 각각 $0.11m/s$ 과 $0.094m/s$ 으로 본 연구를 통해 개발한 수정CIP법을 통한 결과가 실제 액적의 충돌 속도인 $0.19m/s$ 에 더 근사한 값을 얻었다. 그러나 실제 값과 수치해석 사이의 오차는 수치해석 수행 시 경계조건을 벽으로 처리함으로써 발생되었다고 판단된다.

4. 결 론

본 연구에서는 기존의 CIP법에서 발생했던 질량 보존 오차를 개선하기 위하여 대류항 부분을 반복 계산하는 수정된 CIP법을 제안하였다. 이를 통해 기존 CIP법에 비해 32%의 오차를 줄일 수 있었다. 또한 벽면 충돌 후 액적 변형 속도를

실험값과 기존 CIP법 및 수정된 CIP법의 결과와 비교하였으며, 실험을 통해 구현한 We수 변화에 따른 액적의 퍼짐 형상을 모사함으로써 본 연구의 타당성을 입증하였다.

참고문헌

- [1] 1981, Hirt, C.W. and Nichols, B.D., "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries," *Journal of Computational Physics*, Vol.39, pp.201-225.
- [2] 1994, Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., "A Level Set Approach for Computing Solution to Incompressible Two-Phase Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol.114, pp.146-159.
- [3] 1985, Takewaki, H., Nishiguchi, A. and Yabe, T., "Cubic Interpolated Pseudo-particle Method (CIP), for Solving Hyperbolic-type Equations," *J. Comp. Phys.*, Vol.61, pp.261-268.
- [4] 1991, Yabe, T., "A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver," *Comput. Phys. Communications*, Vol.66, pp.219-232.
- [5] 1995, Yabe, T. and Xiao, F., "Description of complex and sharp interface with fixed grids in incompressible and compressible fluid," *Computers Math. Applic*, Vol.29, pp.15-25.
- [6] 2003, Lee, J.H., Kang, J., Im, D. and Kim, C.J., "Analysis of the Flow in Square Cavity Using CIP method in Non-staggered Grid Arrangement," *KSME(B) spring conference*, pp.1821-1826.
- [7] 2009, 이정희, 허남건, "CIP 방법을 사용한 해석법," *한국전산 유체 공학회 2009년도 추계학술대회 논문집*, pp.211-217.