



모멘트 기법과 PARSEC 함수를 이용한 에어포일 신뢰성 기반 최적설계

이 재 훈¹ 강 희 엽,² 권 장 혁,³ 곽 병 만⁴

RELIABILITY-BASED OPTIMIZATION OF AIRFOILS USING A MOMENT METHOD AND PARSEC FUNCTION

Jae Hun Lee,¹ Hee Youb Kang,² Jang Hyuk Kwon³ and Byung Man Kwak⁴

In this study, reliability-based design optimizations of airfoils were performed. PARSEC function was used to consider the uncertainty of the aerodynamic shape for the reliability-based shape optimization of airfoils. Among various reliability analysis methods, the moment method was used to compute the probability of failure of the aerodynamic performance. The accuracy of the reliability analysis was compared with other method and it was found that the moment method predicts the probability accurately. Deterministic and reliability-based optimizations were performed for the shape of the RAE2822 airfoil and it was demonstrated that reliability-based optimum assures the aerodynamic performances under uncertainties of the shape of the airfoil.

Key Words : 신뢰성 해석(Reliability Analysis), 모멘트 기법(Moment Method), 파섹 함수(PARSEC Function)

1. 서 론

컴퓨터 성능과 해석 기법의 발달로 인해 최적설계에서 고정밀의 해석 기법의 적용이 많아지고 있다. 비압축성의 계산에만 사용이 제한되어있는 패널 기법에서 압축성을 고려할 수 있는 오일러 방정식이나 점성의 영향을 고려할 수 있는 Navier-Stokes 방정식을 사용한 유동해석 기법이 최적화에 많이 사용되고 있는 추세이다. 최적설계 기법에 있어서도 기존의 결정론적(deterministic) 방법들이 최적점을 벗어난 곳에서의 성능에 대한 보장을 할 수 없는 한계가 있으므로 이를 극복하기 위해 강건 설계(robust design)나 신뢰성 기반 최적설계(reliability based design optimization, RBDO)에 대한 연구가 많이 이루어지고 있는

추세이다. 물리적 세계에서는 인자들이 불규칙한 특성을 나타낼 수 있다. 따라서 확률 변수로 고려하는 것이 타당하다. 결정론적 최적점의 경우 가용 영역(feasible region)의 경계에 주로 위치하고, 신뢰성 기반 최적점의 경우 가용 영역 내부에 위치한다. 따라서 신뢰성 기반 최적점의 경우 설계점 밖에서의 성능을 어느 정도 보장해 줄 수 있다. RBDO의 경우 설계 변수나 해석에 관련된 인자(parameter)들이 확률 변수(random variable)라고 보고 최적화를 수행한다.

항공 우주 분야를 예로 들면 확률 변수는 마하수나 받음각 등의 유동 조건과 날개 형상 등을 들 수 있다. 실제 항공기의 운용 시에 유동 조건은 항상 일정할 수 없으며 시간과 공간에 따라 변하게 된다. 날개의 형상 또한 실제 운용 시에 설계된 형상과 차이가 발생할 수 있는 불확성이 존재한다. 이와 같은 확률 변수들로 인해 공력 계수와 같은 항공기의 성능 또한 확률 분포를 가지게 된다. 그런데 날개의 형상을 확률 변수로 고려할 때 주로 평면 형상(planform shape)에 관련된 것들을 주로 다루어 왔다. 즉, 테이퍼비(taper ratio)나 뒤젯힘각(sweepback angle) 등을 확

1 정회원, 대한항공 항공우주사업본부

2 삼성전자

3 정회원, 한국과학기술원

4 한국과학기술원

* Corresponding author, E-mail: jaehlee@koreanair.com

를 변수로 가정하여 신뢰성 기반 최적설계를 수행해왔다.

Ahn 등은 날개의 평면 형상(planform shape) 관련 변수를 최적화하는 연구를 수행하였다[1]. 설계 변수로는 뒷젓 힘각, 테이퍼비 등이었으며 이들 변수를 확률변수로 가정하였으며 더불어 유동 조건인 마하수와 받음각 또한 확률 변수로 가정하여 확률기반 최적설계를 수행하였다. 민감도 기반 최적설계 기법의 일종이지만 공학 분야에서의 적용은 많이 이루어지지 않은 trust region 기법을 사용해 최적화의 효율성을 높이고자 하였다.

Kim과 Kwon은 Hicks-Henne 함수를 형상함수로 하여 각 설계 변수가 가우시안 분포(Gaussian distribution)를 따른다고 가정하여 ONERA-M6 날개의 신뢰성 기반 형상 최적설계를 수행하였다[2]. 신뢰성 해석에서의 효율성을 높이기 위해 BTPA(bidirectional two point approximation)를 개발하였으며 이를 이용해 공력 계산을 대체하여 계산 부하를 줄일 수 있었다. 그러나 날개 형상에 대한 perturbation 또는 bump의 일종인 Hicks-Henne 함수의 인자를 확률 변수로 가정하였기 때문에 물리적 의미를 찾기가 쉽지 않다.

Hicks-Henne 함수와 달리 Sobieczky에 의해 제안된 PARSEC 함수는 그 인자가 에어포일의 형상과 직접 연관이 있다[3]. PARSEC 함수의 인자에는 앞전 반경, 최대 높이, 최대 높이 위치, 뒷전 각도 등이 있으며 실제 측정 가능한 값들이기 때문에 이들 인자를 확률 변수로 설정하는 것은 타당하다. 설계 변수의 개수가 고정되어있어서 형상 표현 능력이 다소 부족하지만 최근 연구를 보면 천음속 에어포일의 형상 최적설계에서 기존의 형상함수들과 대등한 성능을 보여 주고 있다[4,5].

본 연구에서는 에어포일에 대한 신뢰성 기반 최적설계가 수행되었다. 에어포일 형상을 PARSEC 함수로 근사화하고 PARSEC 함수의 인자를 확률 변수로 설정하여 에어포일의 공력 계수의 신뢰도를 구하였다. 이를 통하여 에어포일 형상에 불확실성이 존재하는 경우에 대한 신뢰성 기반 최적설계를 수행하였다.

2. 공력 형상 최적설계

2.1 유동장 해석

유동장 해석을 위해 2차원 오일러(Euler) 방정식을 사용하였다. 식 (1)과 (2)는 압축성 오일러 방정식을 직교좌표계에서 미분형태로 표시한 것이다.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

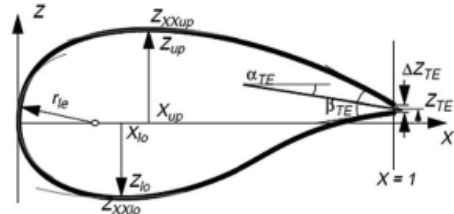


Fig. 1 PARSEC function[3]

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho E \end{pmatrix}, f_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + \delta_{i1} p \\ \rho u_i u_2 + \delta_{i2} p \\ \rho u_i H \end{pmatrix} \quad (2)$$

ρ , u , p , E , H , T 는 각각 밀도, x_i 축 방향의 속도성분, 압력, 총에너지, 총엔탈피 및 온도를 나타낸다. 공간 이산화 기법은 유한 체적법을 사용하였고, 시간 전진은 내재적 기법의 일종인 DADI를 사용하며, 다중격자(multigrid), mesh sequencing 등을 이용해 수렴 가속을 한다[6].

2.2 형상 함수

Hicks-Henne 함수는 많은 연구자들에 의해 사용되어져 온 형상함수로 적은 설계 변수로도 좋은 결과를 보여준다고 알려져 있다. 그러나 Hicks-Henne 함수에서 설계 변수는 아무런 물리적 의미가 없기 때문에 이를 이용하여 형상의 신뢰성 해석을 하기에는 어려움이 있다.

PARSEC 함수는 Hicks-Henne 함수와 달리 함수의 파라미터들이 형상과 물리적으로 연관되어 있다. PARSEC 함수는 다항식의 합으로서 식 (7)과 같이 표현된다.

$$Z = \sum_{n=1}^6 a_n(p) X^{n-1/2} \quad (7)$$

식 (7)에서 a_n 은 다항식의 계수를 뜻하고 p 는 PARSEC 함수의 파라미터를 의미한다. PARSEC 함수의 파라미터들은 Fig. 1에 표시되어 있고, 주어진 형상에 대해 $a_n(p)$ 는 PARSEC 함수의 파라미터로부터 역으로 구할 수 있다. PARSEC 함수에는 총 12개의 파라미터들이 존재하는 데 일반적으로 에어포일의 뒷전의 X 좌표인 X_{TE} 는 1로 설정하므로 총 11개의 파라미터가 존재한다.

본 연구에서는 이와 같은 PARSEC 함수를 이용하여 에어포일의 형상을 표현하고 PARSEC 함수의 파라미터들이 확률 분포를 가진다고 가정하여 확률기반 형상 최적설계를 수행하게 된다.



3. 신뢰성 해석

신뢰성 해석(reliability analysis)이란 해석 대상이 주어진 조건에 대해 얼마나 신뢰할 수 있는지를 판단하는 것을 말한다. 신뢰성 해석에서의 신뢰성(reliability)은 손상 확률(probability of failure) P_f 를 사용해 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Reliability} = 1 - P_f \quad (8)$$

$$P_f = P(g \leq 0) \quad (9)$$

손상 확률이란 식 (9)와 같이 정의되는 데, 여기에서 g 는 한계 상태 방정식(limit state equation)이라고 하며 해석 대상이 안전하지 아닌지를 판단하는데 사용된다. 식 (9)와 같이 손상 확률이 정의된다면 $g \leq 0$ 인 영역이 손상 영역(failure region)이 되고 $g > 0$ 인 영역이 안전 영역(safety region)이 된다. 각각의 신뢰성 해석 기법마다 손상 확률을 구하는 방법은 다르며 많이 사용되는 기법으로는 몬테 카를로 기법(Monte Carlo Simulation, MCS), 일차 신뢰도 기법(first order reliability method, FORM), 모멘트 기법(moment method) 등이 있다.

3.1 몬테 카를로 기법

몬테 카를로 기법은 반복적으로 임의의 점을 추출해 해석 대상의 신뢰성을 계산한다. 이때 계산의 정확성을 높이기 위해서는 충분한 크기의 샘플점을 필요로 하기 때문에 많은 계산량을 요구한다. 몬테 카를로 기법에서의 손상 확률은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(x(i))] \quad (10)$$

식 (10)에서 N 은 샘플의 크기를 뜻하고, $X(i)$ 는 i 번째 확률 변수를 뜻한다. I 는 표시 함수(indicator function)로서 $g > 0$ 가 되어 해석 대상이 안전하므로 0이 되고, $g \leq 0$ 일 때는 해석 대상이 불안전할 것으로 예상되므로 1이 된다. 보통 샘플 크기는 수만에서 수십만에 이르기 때문에 해석하는 데 소요되는 시간이 길면 이 방법은 비효율적이 된다. 그런데, 컴퓨터 상에서 난수의 발생은 완전하지 않기 때문에 몬테 카를로 기법의 결과를 단일한 값으로 나타내기 보다는 구간으로 표시하기 것이 더 적합할 수 있다. 아래의 식은 몬테 카를로 기법의 결과를 구간으로 표시하는 공식을 나타낸다.

$$P_f - \sqrt{\left(\frac{P_f(1-P_f)}{N}\right)} z_\alpha \leq P_f \leq P_f + \sqrt{\left(\frac{P_f(1-P_f)}{N}\right)} z_\alpha \quad (11)$$

식 (11)에서 z_α 는 z 임계값(critical value)이라고 불리우고 현재 연구에서는 97.5%의 신뢰도를 나타내는 1.96을 사용하였다.

3.2 일차 신뢰도 기법

FORM은 한계 상태 방정식을 선형의 함수로 근사화하고 축소 공간(reduced space)에서 most probable point of failure(MPP)라고 불리우는 점을 찾는 데, 이는 원점에서 한계 상태 방정식까지의 최단 거리에 있는 점에 해당한다 [7]. 축소 공간에서의 축소 변수는 다음과 같이 정의 된다.

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (12)$$

원점에서 MPP까지의 거리를 β 라고 하며 이것의 정의는 다음과 같다.

$$\beta = \|u\| = \sqrt{u^T u} \quad (13)$$

β 는 신뢰도 지수(reliability index)라고 불리우며 일차 신뢰도 기법에서는 한계 상태 방정식의 평균(μ)과 분산(σ)이 다음의 관계를 가지고 있다고 가정한다.

$$\beta = \frac{\mu}{\sigma} \quad (14)$$

확률 변수들이 표준 정규 분포(standard normal distribution)를 따른다고 할 때 다음의 관계가 성립한다.

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (15)$$

3.3 모멘트 기법

모멘트 기법은 통계적 모멘트들로부터 확률 분포를 직접 구하는 방법으로, 앞에서 살펴본 일차 신뢰도 기법과 달리 별도의 최적화 문제를 풀 필요가 없다. 일반적으로 통계적 모멘트는 다음과 같이 정의된다.

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx \quad (16)$$

식 (16)에서 M_k 는 k 번째 중심 모멘트(central moment)를 의미하고, x 는 확률 변수, $f(x)$ 는 확률 분포 함수 또는 확률 밀도 함수(probability density function, PDF)라고 불리운다. 식 (16)은 다음과 같은 수치적인 적분으로 구할 수 있다.

$$E\{g^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x)]^k \phi(x) dx \cong \sum_{i=1}^m w_i [g(l_i)]^k \quad (17)$$

식 (17)에서 w_i 는 i 번째 적분의 가중치를 뜻하고 l_i 는 i 번째 적분점을 뜻한다. Rahman 등은 일반적인 적분점과 가중치를 구할 수 있는 MBQR(moment based quadrature rule)을 제안하였다. MBQR에서는 우선 다음의 선형 방정식을 풀어야 한다.

$$\begin{bmatrix} \mu'_{m-1} - \mu'_{m-2} \cdots (-1)^{m-1} \mu'_0 \\ \mu'_m - \mu'_{m-1} \cdots (-1)^{m-1} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_{2m-2} - \mu'_{2m-3} \cdots (-1)^{m-1} \mu'_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu'_m \\ \mu'_{m+1} \\ \vdots \\ \mu'_{2m-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

식 (18)에서 μ' 는 i 번째 확률 변수의 raw moment를 뜻하고, 이 선형 방정식의 해인 r_i 는 식 (19)의 계수로 사용된다.

$$x^m - r_1 x^{m-1} + r_2 x^{m-2} + \cdots + (-1)^m r_m = 0 \quad (19)$$

$$r_1 = \sum_{i=1}^m l_i, r_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m l_i l_j, \dots, r_m = l_1 l_2 \cdots l_m \quad (20)$$

식 (17)의 가중치 w_i 는 다음의 식으로 구해진다.

$$w_i = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1, k \neq i}^m (x - l_k) \phi(x) dx}{\prod_{k=1, k \neq i}^m (x_i - l_k)} = \frac{\prod_{k=0}^{m-1} (-1)^k \mu'_{m-k-1} q_{ik}}{\prod_{k=1, k \neq i}^m (x_i - l_k)} \quad (21)$$

이와 같이 l_i 와 w_i 를 계산한 후 통계적 모멘트를 quadrature rule을 통해 계산할 수 있게 된다. 통계적 모멘트가 계산되어지면 피어슨 시스템을 통해 한계 상태 방정식의 PDF가 근사화되고 이로부터 손상확률을 구하게 된다[8,9].

3.4 신뢰성 해석 비교

RAE2822 에어포일에 대해 신뢰성 해석 기법의 정확성을 비교하였다. 2차원 비점성 압축성 유동해석을 수행하였으며 유동 조건으로는 마하수 0.73, 받음각 2.78도가 사용되었다. 한계 상태 방정식은 다음 식 (22)와 같다.

$$P_f = P(C_l - C_{l,Ref} \leq 0) \quad (22)$$

식 (22)에서 $C_{l,Ref} = 0.98 C_{l,\mu}$ 이며 사용된 확률 변수의 평균과 표준 편차는 Table 1에 표시하였다. 각 신뢰성 해석 기법의 결과는 Table 2에 표시하였다. Table 2에서 몬테 카를로 기법(MCS)은 신뢰도 97.5%에 대한 것이며 () 안의 숫자는 식 (11)의 confidence interval을 의미한다. 모멘트 기법의 경우 몬테 카를로와 잘 일치하는 반면 일차 신뢰도 기법은 다소 큰 차이를 보인다.

4. 신뢰성 기반 최적설계

4.1 결과

3.4 사용된 RAE2822 에어포일에 대해 신뢰성 기반 최적설계를 수행하였다. 목적함수는 항력으로 충격파에 의한 조파항력을 감소시키는 것이며 최적화 정칙화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \min C_d \\ \text{s.t. } P_{f,Ref} - P(C_l - C_{l,Ref} \leq 0) > 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$P_{f,Ref}$ 는 0.1, $C_{l,Ref}$ 는 0.863으로 설정하였다. 식 (23)의 구속 조건은 설계변수들이 불확실성을 가지며 확률분포를 따를 때 C_l 이 0.863보다 클 확률이 90% 이상이 되도록 설계함을 뜻한다.

Table 3과 Fig. 2-3에 최적설계 결과를 표시하였다. Table 3은 결정론적 최적점과 신뢰성 기반 최적점의 공력 계수를 비교한 것으로 항력은 결정론적 최적점이 더 작고, 양력은 신뢰성 기반 최적점이 더 크음을 알 수 있다. 신뢰성 기반 최적점의 경우 에어포일 형상의 불확성에 대해 공력

Table 1 Mean and standard deviation of PARSEC function

	X_{up}	Z_{up}	Z_{Xup}	η_e	β_{TE}
μ	0.42896	0.06301	-0.42818	0.00819	-0.1540
σ	0.01	0.001	0.01	0.001	0.01

Table 2 Comparison of probability of failure

Level	Moment Method	FORM	MCS
3	0.10702	0.172	0.1011 (0.09952, 0.10701)
5	0.10022		
7	0.10284		

Table 3 Result of optimizations

	Initial	Deterministic	Reliability
C _l	0.88005	0.86302	0.91835
C _d	0.01778	0.01045(-41.2%)	0.01131(-36.4%)

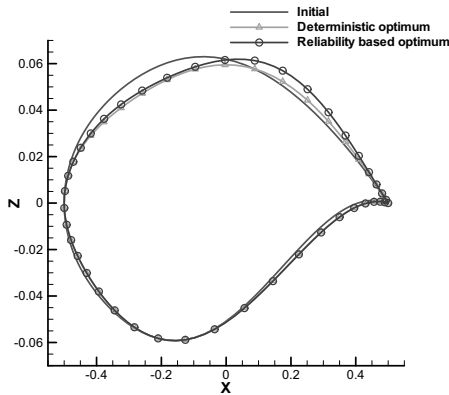


Fig. 2 Shape of initial and designed airfoils

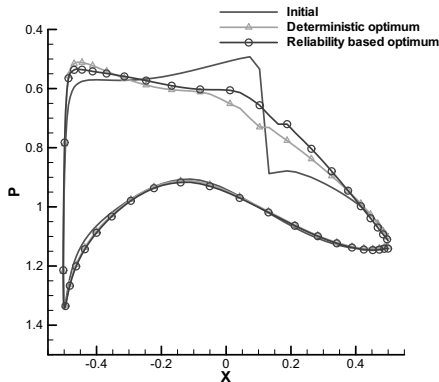


Fig. 3 Pressure distributions of initial and designed airfoils

성능을 일정 수준으로 유지하기 위해 항력을 덜 감소시키며 양력을 높인 것으로 보인다. Fig. 3의 에어포일 형상을 보면 신뢰성 기반 최적점의 최대 높이가 결정론적 최적점의 최대 높이에 비해 더 높음을 알 수 있다. Fig. 4의 압력 분포를 보면 신뢰성 기반 최적점이 압력 회복 구간에서 더 낮은 압력 분포를 나타내는 데, 이는 항력의 감소가 확률론적 최적점에 비해 작기 때문으로 보인다.

5. 결 론

본 연구에서는 신뢰성 해석 기법을 이용하여 에어포일의 신뢰성 기반 최적설계를 수행하였다. 에어포일 형상의 불확실성을 고려하기 위해 PARSEC 함수가 사용되었다. 신뢰성 해석에는 모멘트 기법이 사용되었으며 일차 신뢰도 기법에 비해 더 정확한 예측이 가능함을 확인하였다.

RAE2822 에어포일의 조파항력 감소 문제에 위 기법으로 신뢰성 기반 최적설계가 수행되었다. 최적설계 결과 신뢰성 기반 최적점의 형상에서 항력의 감소가 결정론적 최적형상에 비해 작았지만 보다 높은 양력을 보여주어서 형상의 불확실성을 고려한 최적설계가 가능함을 확인하였다. 향후 연구에서는 좀 더 다양한 에어포일과 유동 해석 기법에 대한 연구로 확장하여 에어포일의 신뢰성 기반 최적설계의 실효성을 높이고자 한다.

참고문헌

- [1] 2005, Ahn, J.G., Kim, S.W. and Kwon, J.H., "Reliability Based Wing Design Optimization Using Trust Region-Sequential Quadratic Programming Framework," *Journal of Aircraft*, Vol.42, No.5, pp.1331-1336.
- [2] 2005, Kim S.W. and Kwon, J.H., "The Efficient Aerodynamic Design Optimization with Uncertainties," *Computational Fluid Dynamics Journal*, Vol.14, No.2, pp.160-171.
- [3] 1998, Sobieczky, H., "Parametric Airfoils and Wing," *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol.68, pp.71-88.
- [4] 2005, Chiba, K., Obayashi, S., Nakahashi, K. and Morino, H., "High-Fidelity Multidisciplinary Design Optimization of Aerostructural Wing Shape for Regional Jet," *23rd AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Toronto, Canada.
- [5] 2004, Ray, T. and Tsai, H.M., "Swarm Algorithm for Single- and Multiobjective Airfoil Design Optimization," *AIAA Journal*, Vol.42, pp.366-373.
- [6] 2003, Kim, Y.S., Park, S.H., Sung, C.-h. and J.H. Kwon, "Drag Prediction Workshop Results Using the Parallel Multigrid Solver KFLOW3D," *AIAA 2nd Drag Prediction Workshop*, Orlando.
- [7] 2000, Halder, A. and Mahadevan, S., *Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design*, John Wiley & Sons.
- [8] 2002, Seo, H.S. and Kwak, B.M., "Efficient Statistical Tolerance Analysis for General Distributions using Three-point Information," *International Journal of Production Research*, Vol.40, pp.931-944.
- [9] 2005, Lee, S.H. and Kwak, B.M., "Response Surface Augmented Moment Method for Efficient Reliability Analysis," *Structural Safety*, Vol.28, pp.261-272.