



POD를 사용한 3차원 후향계단 유동장 분석 예제

이 광 섭,¹ 이 은 석^{*2}

EXAMPLES OF REDUCED ORDER MODELLING FOR A 3D BACKWARD FACING STEP FLOW USING POD TECHNIQUE

K.S.¹. Lee and E.S. Lee^{*2}

Unsteady CFD results of the backward facing step (BFS) flow field is reconstructed by the low-dimensional modes using the POD (Proper Orthogonal Decomposition) technique. Flow responses to the blowing or suction with various frequencies and amplitudes applied at the edge of the BFS can also be analysed using the same technique. The present technique can be effectively applied to the feedback flow control device.

Key Words : 전산유체역학(CFD), 비정상유동(Unsteady Flow), 후향계단(Backward Facing Step), 적합적교분해(Proper Orthogonal Decomposition, POD)

1. 서 론

POD (Proper Orthogonal Decomposition)는 고차의 자유도를 갖는 모델에 대해 지배적인 영향을 미치는 저차 모드를 추출하고 이를 바탕으로 원 모델을 재구성하는 기법이다. 본 연구에서는 3차원 후향계단(backward-facing step) 유동장의 비정상 수치해석결과에 POD 기법을 적용하여 저차유동모드를 추출하고 이를 통해 전 유동장을 재구성하는 기법을 소개한다. 이 기법은 후향계단의 모서리에 다양한 주파수와 강도를 갖는 blowing 및 suction을 가하는 경우에 대해서도 적용 가능하다.

후향계단 유동장에 나타나는 유동 구조의 시간 및 공간적 거동을 적절하게 묘사할 수 있는 최적의 저차유동모드를 추출하기 위하여 공간에 대해 Sirovich[1]가 제안한 스냅샷에 기반한 기법을 사용한다. POD를 속도장에 적용하는 경우 각 모드에 대한 고유치가 에너지량을 대표한다. 이러한 특성을 이용하여 일정 기준 이하의 에너지를 갖는 유동모드를 판별하고 배제할 수 있다.

POD를 적용하기 위하여 후향계단의 고해상도 유동장데이

터를 사용한다. 고해상도 유동장데이터는 주로 CFD를 사용하여 비교적 손쉽게 얻을 수 있다. Kostas 등[2]은 후향계단 유동의 유동장과 와류 특성을 분석하기 위해 PIV 실험을 수행하였다. 그들은 난류운동에너지, 와류, 속도 등 다양한 유동변수에 대한 POD를 수행하여 유동구조의 분석을 수행하였다.

본 기법은 저차유동모드를 통해 전유동장을 재구성함으로써 적은 계산량으로 짧은 시간 안에 유동특성에 대한 정보를 얻을 수 있다. 따라서 blowing 및 suction 등 유동제어입력에 의한 유동특성 변화를 실시간으로 모델링할 수 있으므로 실시간 feedback flow control에 적용될 수 있다.

2. 저차 유동모드 추출기법

2.1 이론적 배경[1]

2.1.1 Coherent structures

아래에 Sirovich[1]에 의해 소개된 coherent structure에 대한 이론적 배경을 요약하여 기술한다. 이는 유동 속도의 공간적 상관관계를 직교분해하여 coherent structure를 구성하는 기법으로서 Lumley[3,4]가 제시한 아이디어에 바탕을 두고 있다.

비정상 유동장의 유동변수 $v(x,t)$ 에 대하여 공간상관관계 텐서 K 를 다음과 같이 정의한다.

1 정희원, 국방과학연구소

2 정희원, 국방과학연구소

* TEL : (042) 821-2445

* Corresponding author, E-mail: eslee@add.re.kr



$$K(x,x') = \langle v(x,t) vT(x',t) \rangle \tag{1}$$

여기서 $\langle \rangle$ 기호는 앙상블 평균을 나타내며 이를 통해 K 는 통계적으로 정상상태의 유동특성을 대표한다.

$v(x,t)$ 를 유동의 경계조건 및 지배방정식을 만족하는 일련의 벡터함수로 이루어진 수직 공간 $\{\phi_n(x)\}$ 로 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$v = S \text{ an}(t) \text{ fn}(x) \tag{2}$$

$\{\phi_n(x)\}$ 의 선형조합을 통하여 또 다른 수직 공간 $\{\psi_n(x)\}$ 을 다음과 같이 생성할 수 있다.

$$y_n = S \alpha_{nm} \text{ fm} \tag{3}$$

여기서 α_{nm} 은 $\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}$ 를 만족한다.

이제, 다음의 조건

$$v = S \text{ An}(t) \text{ yn}(x) \text{ 이면 } \langle \text{ AkAIT} \rangle = \text{ lkdkl} \tag{4}$$

을 만족하는 $\{A_n\}$ 과 $\{\psi_n(x)\}$ 를 사용하여 다음과 같이 공간 상관관계 텐서 K 를 표현할 수 있다.

$$K(x,x') = S \text{ ln yn}(x) \text{ ynT}(x) \tag{5}$$

이를 만족하는 수직 공간 $\{\psi_n(x)\}$ 를 일컬어 coherent structures 라고 한다. 식 (5)에서 알 수 있듯이 유동변수 v 는 공간상관관계 텐서 K 의 고유치 λ_n 와 모드 ψ_n 에 의해 그 특성이 분해되어 표현된다. K 는 nonnegative Hermitian 오퍼레이터로서 Mercer's Theorem[5]에 의해 주어진 K 에 대해 유일한 coherent structure가 존재함이 알려져 있다.

Fredholm theory[5]에 의해 잘 알려졌듯이 고유치 λ_n 을 찾는 문제는 다음의 값

$$\|K - S \text{ lnyn}(x)\text{yn}(x')\|_2 \tag{6}$$

을 최소화하는 문제로 귀결되며 유한차수의 모드 ψ_n 을 선택하는 경우 least square 관점에서 가장 적은 오차로 유동특성을 표현할 수 있다.

유동변수 v 를 유동의 속도로 선택하면 유동의 평균에너지를 E 는 다음과 같이 표현된다.

$$E = \int \langle u_j(x)u_j(x) \rangle dx = \int K_{jj}(x,x)dx = S \text{ ln} \tag{7}$$

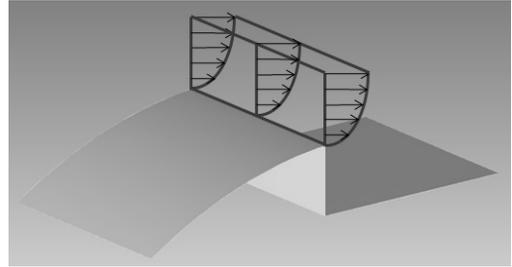


그림 1. 계산에 사용된 후향계단의 형상.

즉 고유치 λ_n 은 ψ_n -축에 투영된 유동의 평균에너지를 표현한다. 따라서 유동의 평균에너지를 많이 포함하는 순서대로 ψ_n 을 선택하여 유동장을 재구성하면 최소의 데이터로 유동장의 특성을 가장 잘 모사할 수 있다.

2.1.2 스냅샷 POD

유동장의 저차모드 ψ_n 을 얻는 방법으로서 Sirovich[1]의 스냅샷 기법이 있다. 유동장을 단위시간 τ 로 나누었을 때 각 순간의 유동장 구조, 즉 유동의 스냅샷 $v^{(n)} = v(x,n\tau)$ 가 서로 상관되지 않도록 적절히 큰 τ 를 선택하면 K 는 다음과 같이 표현된다.

$$K(x,x') = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M v(n)(x)v(n)(x') \tag{8}$$

이는 다음과 같은 고유치문제에 변환된다.

$$y = \sum_{n=1}^M \text{Anv}(n) \tag{9}$$

따라서 스냅샷의 갯수 M 에 대해서만 고유치를 계산하므로 고해상도의 유동특성을 분석하는데 효율적인 것으로 알려져 있다.

3. 결 과

3차원 후향계단 유동의 CFD 계산결과에 대하여 POD를 수행하여 유동장을 재구성하였다. 계산에 사용된 후향계단의 형상은 그림 1과 같으며 유동장 조건은 표 1과 같다.

표 1. 유동장 조건.

마하수	0.3												
주파수(Hz)	0	400	600	800	1,000								
진폭(%)	0	10	20	30	10	20	30	10	20	30	10	20	10

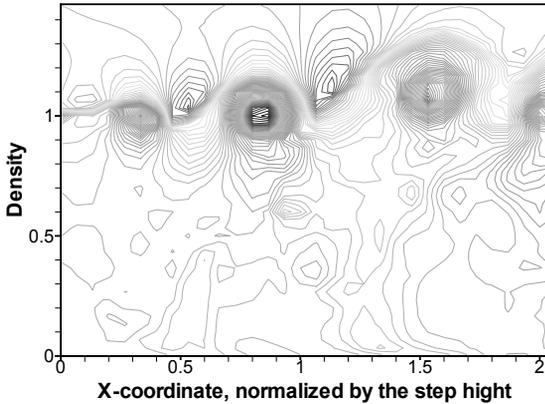


그림 2. CFD 계산결과. (등밀도 선도, 800Hz, 진폭 10%)

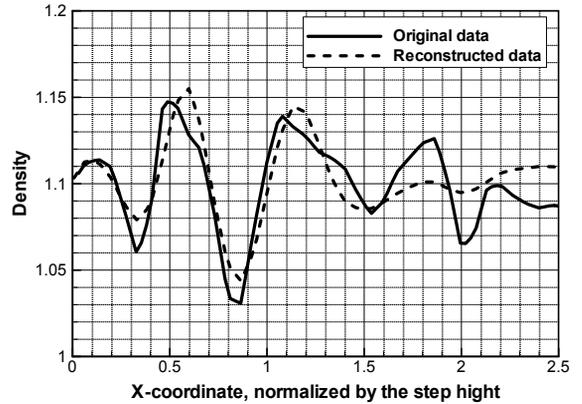


그림 4. POD를 통한 유동장 재구성 결과. (중심선 밀도분포)

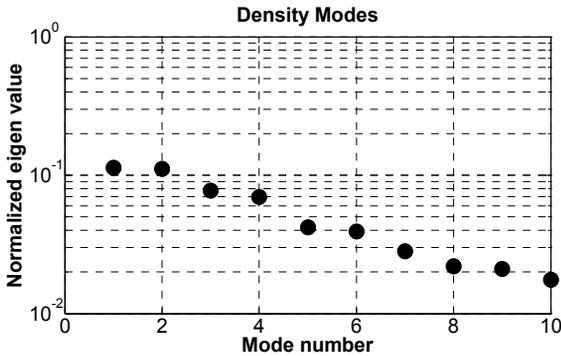


그림 3. POD를 통한 저차모드 추출 결과.

본 연구 결과의 예제로서 그림 2에 800Hz, 10% 가진의 조건에 대한 CFD 계산결과를 나타내었다. 계단의 모서리에서 분리되어 나온 거대 와류들의 구조를 관찰할 수 있다.

그림 3에 POD를 통한 저차유동모드 추출 결과를 나타내었다. 대부분의 에너지가 6차 이하의 모드에 분포하며 10차의 모드로써 유동장의 거시적 특성을 표현할 수 있을 것으로 예상된다. 그림 4에 10차의 모드로써 재구성된 유동장의 중심선에서의 밀도분포를 CFD 계산결과와 그것과 비교하여 나타내었다. POD를 통한 유동장 재구성 결과가 거대 와류의 거동을 대표하는 밀도의 변동량을 거시적으로 잘 표현함을 확인할 수 있다.

4. 결 론

3차원 후향계단(backward-facing step) 유동장의 비정상 수치 해석결과에 POD 기법을 적용하여 저차유동모드를 추출하고

이를 통해 전 유동장을 재구성하는 기법을 소개하였다. 이 기법은 적은 계산량으로 짧은 시간 안에 유동특성에 대한 정보를 얻을 수 있다. 따라서 blowing 및 suction 등 유동제어입력에 의한 유동특성 변화를 실시간으로 모델링할 수 있으므로 실시간 feedback flow control에 적용될 수 있다.

참고문헌

- [1] 1987, Sirovich, L., "Turbulence and the dynamics of coherent structures Part I: Coherent Structures," *Applied mathematics*, vol.45, no.3, pp.561-571.
- [2] 2002, Kostas, J., Soria, J. and Chong, M.S., "Particle image velocimetry measurements of a backward-facing step flow," *Experiments in fluids*, vol.33, no.6, pp.838-853.
- [3] 1981, Lumley, J.L., "Coherent Structures in Turbulence," *Transition and Turbulence*, pp215-242, Academic Press, N. Y.
- [4] 1967, J. L. Lumley, "The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows," *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, pp.166-178, Moscow: Nauka.
- [5] 1955, Riesz, F. and Nagy, B.Sz., "Functional Analysis," *Ungar*, N.Y.