

철도 네트워크에서의 확률적 통행 배정 모형 연구

A Stochastic Transit Assignment Model on Railway Network

박범환[†] 김충수* 노학래**
Bum Hwan Park Chung-Soo Kim Hag-Lae Rho

ABSTRACT

This study is about developing a transit assignment model on railway network. Current transit assignment models are mainly focused on road or urban transportation so that these models, for example, transit assignment model based on optimal strategy generates unrealistic transit assignment. Especially, since the advent of KTX, more passengers are using the transfer route containing KTX but most transit assignment models have a shortcoming that transfer is not considered or is overestimated. We present a new stochastic transit assignment model based on LOGIT considering transfer resistance.

1. 서론

통행 배정(transit assignment)이란 실제 OD통행량이 어떤 경로를 통해 움직이는지를 미리 예측하여, 각 구간 통과 수요량과 각 노선에 얼마만한 수요가 할당되는지를 미리 예측하는 방법론을 통칭한다. 이러한 통행 배정 모형은 주로 도로나 지하철 등이 포함된 일반 대중교통망에서의 모형이 주종을 이루고 있으며, 이에 대한 기존 연구 방법론은 [9]를 참조하면 된다.

먼저 EMME/2에 내장되어 있고, 대중 교통 수요 분석에서 가장 광범위하게 사용되는 모형은 [2]의 “최적전략(optimal strategies)”에 기반한 통행 배정 모형이다. “최적전략”이란 통행자의 평균통행시간을 최소화하는 경로의 선택방법을 의미하는데, 단위노선구간으로 표현된 네트워크 상에서 그들은 최적전략에 포함된 단위 노선 구간들의 노선 횟수에 비례하여 노선별 통행 배정이 이루어지며, 노드에서의 대기 시간도 최적전략에 포함된 노선의 전체 노선 횟수를 이용하여 산출하였다. 노선 간 수요배분이나 노드에서의 대기시간은 상당부분 운행 회수에 의존하여, 위 모형을 실제 네트워크에 적용해 보면 운행 회수에 매우 민감하게 반응할 뿐만 아니라 지역간 철도 네트워크에서의 통행과 달리 빈번한 환승으로 인해 비합리적인 통행 배정 결과를 초래한다고 보고되고 있다[4,6].

[3]의 연구는 [2]와 같은 단위노선구간에 의한 네트워크 확장을 경로구간에 의한 네트워크 확장을 제시하며 네트워크 규모를 크게 줄였다. 네트워크 확장 방법은 다르지만 [3]의 연구 또한 [2]의 최적전략 개념을 원용하여 “제한적 최적전략” 개념을 제시하였다. 이러한 경로 구간 개념에 의한 네트워크 확장은 [4]에서도 사용된다.

위의 연구가 단위노선구간 혹은 경로 구간에서의 노선 선택이 주로 운행횟수에 영향을 받는 반면, “개별 통행자가 링크의 통행비용을 서로 다른 방식으로 인지한다”는 가정하에서 확률적 통행배정 모형을 제시한 연구도 활발하다[1,4,5,6,7].

† 책임저자 : 정희원, 한국철도대학 철도경영정보과
E-mail : beomi72@hanmail.net
TEL : (070)8855-1638 FAX : (031)462-2944

* 정희원, 한국철도대학 철도경영정보과

** 정희원, 한국철도기술연구원 신소재틸팅열차시스템연구단

먼저 [5]는 Dial의 LOGIT기반 확률적 통행배정을 이용하여, 노선구간으로 확장된 네트워크에서 각 노드에서 노선의 선택확률을 도입하였다. [4]는 경로구간으로 확장된 네트워크에서 통합노선별 선택확률을 계산할 때, LOGIT모형을 적용하였으며, 통합노선에 속한 노선들 간의 선택확률은 빈도에 단순 비례하는 것으로 설정한 지역간 철도 통행배정 모형을 구축하였다. 그들은 우선 철도 네트워크를 경로구간으로 확장하고 각 경로 구간을 운행하는 노선의 일반화 비용을 계산한다. 이 때 동일 속성을 갖는 노선들은 하나의 통합된 노선(“통합노선”)으로 합쳐 일반화 비용을 다시 계산한다. 이 때, 각 노드에서 통합노선 및 그 통합노선에 속한 노선간의 선택확률을 다양한 방법으로 설정할 수 있는데, 그들은 통합 노선의 선택은 LOGIT 모형을, 통합노선 내의 노선의 선택은 운행횟수에 비례한다고 가정하였다. 이 때 통합 노선의 선택확률 계산에 사용된 LOGIT모형은 [8]의 연구 결과이다. 이렇게 구성된 확률을 이용하여 경로구간의 기대(expected) 일반화 비용을 이용하여 최단경로를 찾아 통행배정을 수행하게 된다. 이 모형 또한 통합노선의 선택이 LOGIT에 의해 이루어진다는 측면에서는 크게 보아 확률적 통행배정으로 구분할 수 있다. [5]와 [4]의 연구 모두 기중점간 하나의 경로에 확률적 통행배정을 할당하기 보다는 각 노드에서 노선구간 혹은 경로구간에 대해 확률적 통행배정을 고려한다. 그러나 철도 네트워크의 경우, 노선 간 환승이 드물게 일어나고 승객은 환승을 포함한 여러 개의 경로 중 하나를 선택한다는 측면에서는 경로 단위로 통행을 배정하는 모형이 필요하다.

이러한 경로 단위 통행배정에 관해서는 [1,6,7]의 연구가 있다. 먼저 [6]은 노선구간 혹은 경로구간의 선택확률이 아닌 경로(route)단위의 선택확률을 계산하는 확률적 통행 배정 모형을 제시하였다. 이러한 경로단위의 확률적 통행 배정 모형은 복합교통수단망에서의 통행 배정 모형으로 제시한 [7]의 모형에서도 확인할 수 있다. [1]은 독일의 노선 계획 시스템 PROLOP에 내장된 통행배정모형으로서, 독일 철도 네트워크의 특징을 살려, 그들만의 독특한 통행배정 모형을 구축하였으며, 이에 대한 설명은 [10]을 참고하면 된다.

본 연구 또한 철도 네트워크에서의 통행 행태를 고려했을 때, [1,18,17]에 나타난 경로단위의 확률적 통행배정 모형이 가장 현실성 있는 모형이라 판단되며, 이를 위해서는 경로의 효용에 대한 정의 및 설명변수 그리고 파라미터를 먼저 구성해야 한다.

2. LOGIT기반 경로간 통행수요 배분

철도 네트워크에 적합한 통행 배정 모형은 일부 연구([1,4,9])를 제외하고는 존재하지 않으며, [1]의 경우 독일의 철도 네트워크 상황에 특화된 독특한 통행배정 모형을 사용하고 있어, 그 모형에 사용된 파라미터가 한국 철도 네트워크에 적합한지에 대해서는 증명된 바 없다. 또한 [4,9]의 경우 2004년 4월 데이터를 이용하여 LOGIT모형을 도출하였고, 환승 수요가 상대적으로 매우 적어, 모형 개발에 있어 환승 요인을 제외하였다. 그들은 통행배정 시 하나의 경로 구간에 포함된 다양한 노선간의 선택 확률이 이러한 LOGIT모형을 적용하였는데, 본 연구에서는 경로별로 수요를 할당하는 새로운 통행 배정 모형을 구축하고자 한다.

2.1 데이터 분석

철도 네트워크에서의 통행 배정 모형 구축을 위해 본 연구는 KTX, 새마을, 무궁화(통근열차 제외)에 대한 2009년 4월 6일부터 2009년 4월 12일까지의 일주일치 수요를 분석해 보았다. 먼저 [표 1]은 환승여부 및 환승 경로의 속성에 따른 수요이다. 2004년 10월 일평균 환승 수요는 5111명이며 이는 전체 수요의 1.6%인데[8] 반해, 2009년 4월 6일부터 2009년 4월 12일까지의 일주일치 수요 분석에 따르면 일평균 12,150명 수준으로 전체 수요의 4.6%를 차지하고 있어, 환승 수요가 계속 증가하고 있다고 예측할 수 있다. 특히, 이러한 환승 수요의 60%는 KTX가 포함된 환승 수요이며 나머지의 대부분은 직통 노선이 존재하지 않음으로 인해 발생하는 새마을 혹은 무궁화간의 환승 수요이다. 이는 철도 네트워크

에서의 환승을 포함한 경로에 대한 수요 배분을 고려한 통행 배정 모형 개발이 필요함을 반증하는 것이다.

[표 1] 철도 수요 분석 (2009년 4월 6일 - 2009년 4월 12일)

환승	루트 속성	월	화	수	목	금	토	일	합계	비율
직통	KTX	80,098	69,216	72,222	76,590	116,693	120,347	119,522	654,688	36.3%
	무궁화	20,902	18,315	19,116	18,659	29,079	41,577	40,791	188,439	10.5%
	새마을	104,851	89,203	87,016	92,113	140,771	187,748	171,734	873,436	48.5%
	비율	95.8%	96.4%	96.2%	96.1%	94.6%	95.0%	94.2%	95.3%	
KTX 포함 환승	KTX-KTX	192	194	236	202	333	353	491	2001	0.1%
	KTX-새마을	2,315	2,123	2,305	2,364	3,706	3,131	4,001	19,945	1.1%
	KTX-무궁화	3,913	3,105	3,240	3,618	6,234	5,034	5,859	31,003	1.7%
	비율	3.0%	3.0%	3.1%	3.2%	3.4%	2.3%	2.9%	2.9%	
일반 열차 환승	새마을-새마을	56	42	55	53	103	508	889	1,706	0.1%
	새마을-무궁화	274	247	224	231	403	540	597	2,516	0.1%
	무궁화-무궁화	2,379	910	902	1,035	5,525	8,690	8,439	27,880	1.5%
	비율	1.3%	0.7%	0.6%	0.7%	2.0%	2.6%	2.8%	1.8%	
합계		214,980	183,355	185,316	194,865	302,847	367,928	352,323	1,801,614	

이와 관련하여 [8]은 환승 수요를 고려하지 않고 KTX,새마을,무궁화,통근열차의 직통 수요를 배분하는 LOGIT모형을 제시한 바 있다.

[표 2]는 OD별 운행 경로 및 경로 속성을 표로 정리한 것이다. 표에서 보듯이 직통 경로, 환승 경로 등 다양한 경로를 통해 통행이 이루어지고 있다. 특히 동일 차종간 환승(예를 들어 KTX-무궁화)이라 하더라도 환승역은 다수가 존재하며(서울-창원 구간의 경우 밀양역 혹은 동대구역), 최대 10개(수원-부산의 경우)까지의 경로가 존재한다.

[표 2] OD별 운행 경로 및 경로 속성

OD	경로 속성	운행시간	운행요금	운행횟수1	운행횟수2	실제통행량
서울-창원	새마을(직통)	292	37700	3		8
	무궁화(직통)	317	25400	2		22
	밀양(KTX-새마을)	170	47700	16	6	132
	밀양(KTX-무궁화)	171	45500	16	10	102
	동대구(KTX-무궁화)	197	40200	50	10	74
	동대구(KTX-새마을)	183	42800	50	7	1
창원-서울	새마을(직통)	292	37700	3		12
	무궁화(직통)	317	25400	2		17
	밀양(무궁화-KTX)	177	45500	10	17	129
	밀양(새마을-KTX)	174	47700	5	17	110
	동대구(새마을-KTX)	181	42800	7	51	21
	동대구(무궁화-KTX)	192	40000	10	51	14
....

2.2. LOGIT 기반 경로별 선택 확률

위 [표 2]로부터 본 연구는 OD간 경로는 크게 9가지 형태의 경로(KTX직통, 새마을직통, 무궁화직통, KTX-KTX환승, KTX-새마을(혹은 새마을-KTX)환승, KTX-무궁화(혹은 무궁화-KTX)환승, 새마을-새마을환승, 새마을-무궁화(혹은 무궁화-새마을)환승, 무궁화-무궁화환승)로 구성됨을 알 수 있다.

이러한 개별 경로에 대해서도 환승역에 따라 더욱 세분화 될 수 있다.

본 연구에서는 LOGIT모형 구성을 위해 아래와 같은 5가지 대안을 설정하였다. 왜냐하면, KTX-KTX 환승과 새마을-새마을, 새마을-무궁화(혹은 무궁화-새마을)환승은 매우 미미한 수준이라는 점과, 환승 경로의 경우 KTX가 포함되느냐 그렇지 않느냐에 따라 주요 변수인 운행시간에 있어 큰 차이가 발생한다는 점 때문이다.

[표 3] LOGIT모형상의 대안 설정

구분	대안
대안1	KTX
대안2	새마을
대안3	무궁화
대안4	KTX포함환승
대안5	일반열차끼리의 환승

위 5가지 대안 경로에 대한 선택 확률은 LOGIT모형에 따른다고 가정하고, 가장 설명력 있는 효용(utility)을 도출하기 위해 아래와 같은 8가지 효용에 대해 테스트하였다.

아래 8가지 효용은 기본적으로 운행시간(travel time)을 모두 포함하며, 환승저항을 포함하느냐 그렇지 않느냐, 운행 요금(fare)을 포함하느냐 그렇지 않느냐, 그리고 운행횟수를 경로 상에 존재하는 노선들의 운행횟수 중 최소값을 설정하느냐 아니면 [1]의 연구처럼 운행 간격으로 표현하느냐에 따라 나뉜다. 이 때 운행시간은 차내 통행시간과 환승시간의 합으로 구성되며, 환승시간은 30분으로 고정하였다. 또한 ‘환승저항’은 환승이 발생할 경우 1, 그렇지 않으면 0을 갖는 값이며, ‘운행횟수역수의 합’은 두 노선의 운행횟수 $freq1$, $freq2$ 의 역수의 합($1/freq1 + 1/freq2$)를 의미한다. 또한 ‘최소운행횟수’는 환승 경로 상에 존재하는 두 노선의 최소 운행 횟수를 의미한다.

[표 4] 효용의 대안 및 설명 변수

효용종류	첫 번째 변수	두 번째 변수	세 번째 변수	네 번째 변수
효용1	요금	통행시간	최소운행횟수	환승저항
효용2	요금	통행시간	운행횟수역수의 합	환승저항
효용3	통행시간	최소운행횟수	환승저항	
효용4	통행시간	운행횟수역수의 합	환승저항	
효용5	요금	통행시간	최소운행횟수	
효용6	요금	통행시간	운행횟수역수의 합	
효용7	통행시간	최소운행횟수		
효용8	통행시간	운행횟수역수의 합		

본 연구는 2009년 4월 6일 데이터를 기초로 [표 4]에서 설정한 각 효용의 대안들에 대해 최우추정법(Maximum Likelihood Estimation)을 적용하여 설명변수별 파라미터 및 통계량을 계산해 보았다.

분석 결과 환승 저항을 설정하느냐 그렇지 않느냐에 따라 상당한 차이를 보여주고 있다. 또한 요금의 경우 양의 상관관계를 보여 요금은 설명변수에서 제외하고, 대안 3을 최적의 효용으로 설정한다. 특히 운행횟수를 고려하기 위해 설명변수를 최소운행횟수로 설정하느냐 운행횟수 역수의 합으로 설정하느냐에 따라 적합도는 상당한 차이를 보이고 있음을 볼 수 있는데, 이는 [1]에서 사용된 운행간격(headway)에 의한 운행 횟수 고려 방법 보다는 경로의 운행 횟수라 할 수 있는 최소운행횟수를 사용하는 것이 보다 합리적임을 의미한다.

[표 5] 파라미터 추정-환승저항을 설정한 경우

	효용1		효용2		효용3		효용4	
	계수	t통계량	계수	t통계량	계수	t통계량	계수	t통계량
요금(천원)	0.04581	43.5	.076123	68.6				
운행시간 (분)	-0.00882	-39.2	-0.01623	-72.2	-0.01065	-48.0	-.020443	-91.1
최소운행횟수 (회)	0.05508	107.4			0.05924	117.9		
운행횟수 역수의 합			-11.54266	-78.5			-11.44959	-75.9
환승저항	-3.08795	-127.8	-3.33526	-117.9	-3.09618	-131.1	-3.49273	-122.7
ρ^2	0.72343		.70449		0.71588		0.68479	
$\overline{\rho^2}$	0.71784		.69852		0.71160		0.68004	

[표 6] 파라미터 추정 - 환승저항을 설정하지 않은 경우

	효용5		효용6		효용7		효용8	
	계수	t통계량	계수	t통계량	계수	t통계량	계수	t통계량
요금(천원)	0.040590	64.3	0.05409	83.4				
운행시간 (분)	-0.01667	-90.8	-.01854	-98.5	-0.01268	-83.7	-0.01246	-82.7
최소운행횟수	0.06686	143.1			0.07759	171.5		
운행횟수 역수의 합			-22.02595	-111.0			28.27038	-128.2
ρ^2	0.58785		0.58436		0.57126		0.55564	
$\overline{\rho^2}$	0.58164		0.57809		0.56697		0.55120	

3. 철도 네트워크에서의 확률적 통행 배정 모형

본 절에서는 위에서 구한 LOGIT모형을 이용하여 철도 네트워크에서의 확률적 통행 배정 모형을 구축해본다. 먼저 본 모형에서 사용되는 세 가지 개념에 대해 알아본다.

- od 에 대한 경로(path) p : 공급망 상의 아크의 연결 ($p \in P_{od}$)
- 경로 p 에 대한 노선경로(line path) $r = (r^{first}, r^{second})$: 경로 p 상에서 r^{first} 는 첫 번째 열차종(o -환승역), r^{second} 는 두 번째 열차종(환승역- d) ($r \in R_{od}$)

본 연구에서는 노선 경로의 정의에서도 알 수 있듯이 환승은 1회로 제한된다고 가정하고, 철도 네트워크에서의 LOGIT기반 확률적 통행 배정 모형을 구축해 보면 아래와 같다.

철도 네트워크에서의 LOGIT기반 확률적 통행 배정 모형

Step 0. 모든 OD pair의 집합 : S

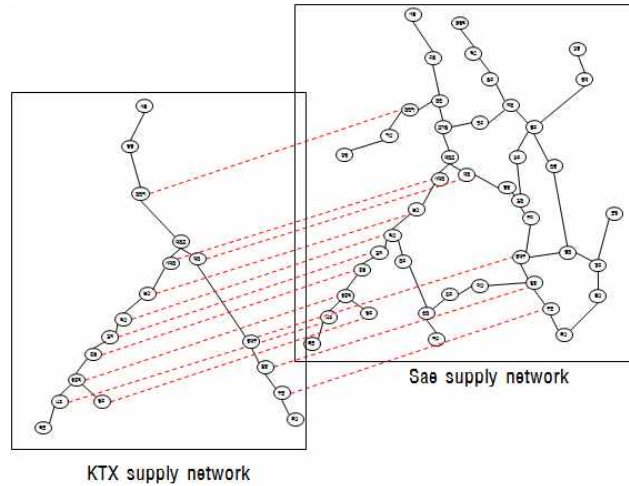
Step 1. S 로부터 하나의 OD pair od 를 선택. $S = S - \{od\}$

Step 2. 최단경로에 의한 od 간 경로 도출

2.1 단일 supply network에서의 경로 계산 (최단 경로)

2.2 두 개 supply network간 환승 경로 계산(k -최단경로) : 계층화된 네트워크 이용

2.3 위에서 구한 경로의 집합을 P_{od}



[그림 1] 계층화된 네트워크

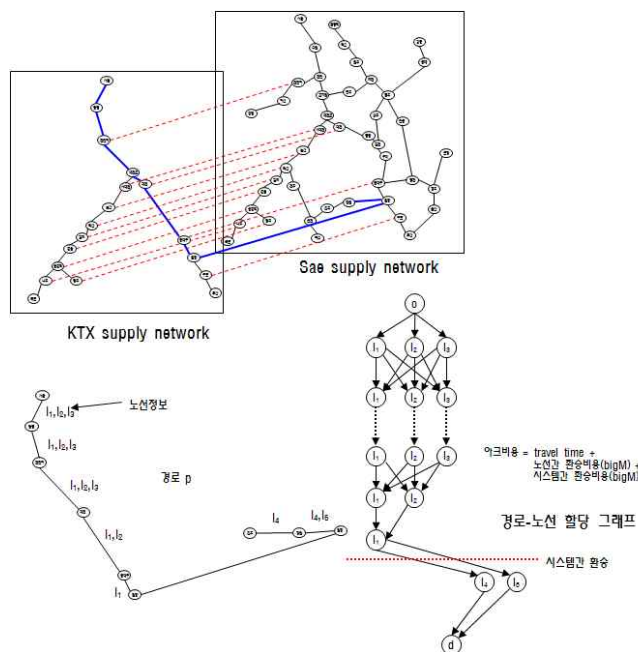
Step 3. 각 경로($p \in P_{od}$)별 노선 할당 : 경로-노선 할당 그래프상의 최단경로 알고리즘

3.1 단일 supply network에서의 직통 경로가 존재하는 경우

3.2 단일 supply network에서의 직통 경로가 존재하지 않는 경우

3.3 경로 p 가 supply network간 환승을 포함한 경우

3.4 경로 p 에 대한 노선 경로 집합 : R_{od}^p ($R_{od} = \cup_{p \in P_{od}} R_{od}^p$)



[그림 2] 경로-노선 할당 그래프

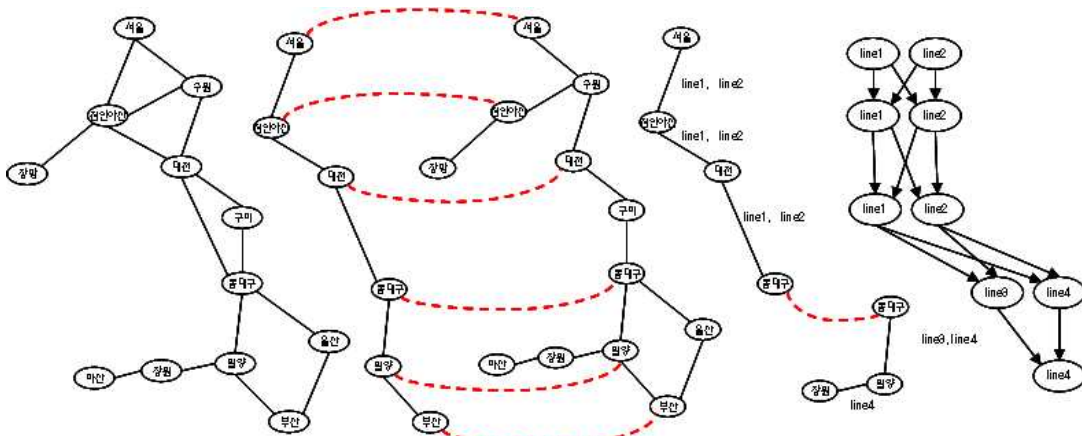
Step 4. 노선경로별 효용 계산 및 비허용 노선 경로 삭제

- 4.1 경로 p 에 대한 모든 노선경로 $r = (r^{first}, r^{second}) \in R_{od}^p$ 에 대해 2-4를 반복. 이 때 r^{first}, r^{second} 는 각각 열차종(o-환승역), 열차종(환승역-d)를 나타냄
- 4.2 운행횟수 설정 : $f_1^r = \sum_{l \in L_{r^{first}}} f_l, f_2^r = \sum_{l \in L_{r^{second}}} f_l$, 여기서 L_r 은 노선경로 r 과 동일한 열차종이 동일한 부분 구간을 운행하는 노선의 집합. 환승이 없는 경우, $f_2^r = \infty$
- 4.3 노선경로별 속성값(통행시간, 최소 운행 횟수, 환승유무) 계산
- 4.4 노선경로별 효용 계산 : $U_r = \alpha \cdot t_r + \beta \cdot \min\{f_1^r, f_2^r\} + \gamma \cdot tf_r$ (t_r : 통행시간, tf_r : 환승유무)
- 4.5 모든 $\forall p \in P_{od}$ 에 대해 4.1~4.4를 반복
- 4.6 비허용 노선경로 삭제 : $U_r \leq \alpha U_{max}$ 인 경로 r 의 삭제

Step 5. 노선경로별 수요 할당

5.1 노선경로별 od 수요 할당량 : $y_{od}^r = \frac{\exp(U_r)}{\sum_q \exp(U_q)} D_{od}$

Step 6. 만약 $S = \emptyset$ 이면 끝, 그렇지 않으면 step 1으로.



[그림 3] 통행배정 모형 예제

[그림 3]의 예제를 통해 위 알고리즘을 기술해보면 아래와 같다. [그림 3]은 2개의 공급망 KTX네트워크와 새마을 네트워크를 가정하였으며, 서울-창원 간 OD수요의 분할 과정을 기술해 본다. 먼저 아래와 같이 공급망별 노선이 정의되어 있다고 가정하자.

- KTX 노선 정보 : 서울-천안아산-대전-동대구(l_1) / 서울-천안아산-대전-동대구-밀양-부산(l_2)
- 새마을 노선 정보 : 서울-수원-대전-구미-동대구-밀양-부산(l_3) / 서울-수원-대전-구미-동대구-밀양-창원-마산(l_4) / 서울-수원-대전-구미-동대구-울산-부산(l_5)

알고리즘 절차에 의해 먼저 서울(o)-창원(d)간 경로를 단일 공급망에서는 최단경로를 계층화된 네트워크 상에서는 최단경로 알고리즘을 이용하여 아래와 같은 경로를 찾게 된다.

- 서울-수원-대전-구미-동대구-밀양-창원(새마을) : p_1
- 서울-천안아산-대전-동대구-밀양(KTX)-창원(새마을) : p_2

· 서울-천안아산-대전-동대구(KTX)-밀양-창원(새마을) : p_3

그리고 난 다음 위에서 구한 각 경로 p_1, p_2, p_3 에 대해 노선경로를 구성한다. 노선경로의 구성은 경로-노선 할당 그래프 상에서 최단경로 알고리즘을 적용한다. 각 경로에 대한 노선경로를 구해보면 아래와 같다.

- p_1 에 대한 노선 경로 : $r_1 = r_1^{first} = (\text{새마을(서울 - 창원)})$
- p_2 에 대한 노선 경로 : $r_2 = (r_2^{first}, r_2^{second}) = (\text{KTX(서울 - 밀양)}, \text{새마을(밀양 - 창원)})$
- p_3 에 대한 노선 경로 : $r_3 = (r_3^{first}, r_3^{second}) = (\text{KTX(서울 - 동대구)}, \text{새마을(동대구 - 창원)})$

각 노선경로에 대한 최소운행횟수는 아래와 같다. 주의할 점은 r_3 의 경우 동일 구간을 운행하는 동일 차종의 노선이 존재하므로 그 노선들의 운행횟수의 합을 고려해야 된다는 점이다.

- r_1 의 최소운행횟수 : $\min\{l_4\}$, $tf_{r_1} = 0$
- r_2 의 최소운행횟수 : $\min\{l_2, l_4\}$, $tf_{r_2} = 1$
- r_3 의 최소운행횟수 : $\min\{l_1 + l_2, l_4\}$, $tf_{r_3} = 1$

위의 노선경로별 속성값을 이용하여 LOGIT모형을 적용하면 노선경로별 수요할당량 $y_{od}^{r_1}, y_{od}^{r_2}, y_{od}^{r_3}$ 를 계산 할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 2009년 4월 RP자료를 이용하여, 환승 저항을 고려한 최초의 LOGIT모형을 제시하였으며, 이 모형을 이용하여 지역간 철도 네트워크에서의 통행배정 모형을 제시하였다. 특히 환승저항을 설정할 경우와 그렇지 않을 경우 통계적 적합도가 상당히 차이가 나는 것을 확인할 수 있으며, 본 연구에서 제시한 운행시간, 최소운행횟수, 환승 저항이라는 세 가지 설명 변수에 의한 LOGIT모형이 상당히 설명력 있는 모형임을 확인할 수 있었다.

추후 연구과제로 실제 데이터를 이용하여 본 연구에서 제시한 통행배정 모형이 어느 정도 예측력을 갖는지를 검증해야 한다.

감사의 글

이 연구는 “한국형 틸팅열차 신뢰성 평가 및 운용기술개발” 연구단 과제에 의해 지원되었으며 이에 감사드립니다.

[참고문헌]

1. A. Bouma and C. Oltrogge(1994), "Linienplanung und Simulation für öffentliche Verkehrswege in Praxis und Theorie", ETR Eisenbahntechnische Rundschau, Jg.: 43, Nr.6, Seite 369-378
2. H. Spiess and M. Florian(1989), "Optimal Strategies : A New Assignment Model for Transit Networks", Transportation Research Part B, Vol. 23B, No.2, pp. 83-102
3. J. De Cea and J. E. Fernandez(1989). "Transit Assignment to Minimal Routes : An Efficient New Algorithm", Traff., Eng. Control 20-10

4. 김경태, 이성모, 권용석(2008), “지역간 철도의 결정적 통행배정모형 구축 연구”, 한국철도학회논문집, 제 11권, 제 6호, pp. 550-561
5. 이재섭, 김익기(2001), “다이알 알고리즘을 이용한 다수간 대중교통 노선배정기법에 관한 연구”, 대한교통학회지, 제 19권 제2호, pp.53-60
6. 임용택(2009), “대중교통 통행배정모형 연구”, manuscript
7. 박경철, 문정준, 이성모, 박창호(2007) “복합수단을 고려한 확률적 대중교통 통행배정모형 개발”, 대한교통학회지, 제 25권 3호, pp.111-121
8. 김경태, 이진선(2007), “다항로짓모형을 이용한 지역간 철도통행 연구”, 대한교통학회지 제25권 1호, pp.109-119
9. 김경태(2007), “지역간 철도 통행배정모형 구축연구”, 박사학위 논문, 서울대학교
10. 박범환, 김충수, 노학래(2009) “철도 노선 간 통행 배정 모형과 노선 계획 간의 관계에 관한 연구”, 한국철도학회 2009년 추계 학술대회 발표 논문집