환상 민들린 평판의 축대칭 면외 진동에서의 비틀림 진동

Torsional Vibration in Axisymmetric Out-of-plane Vibrations of an Annular Mindlin Plate

김창부† 임정기*

Chang-Boo Kim **Jung-Ki Lim**

ABSTRACT

This presentation examines the characteristics of torsional vibration in axisymmetric out-of-plane vibrations of an annular Mindin plate. The out-of-plane vibration of circular or annular plates have been investigated since a long years ago by many researchers. When the classical Kirchhoff plate theory neglecting the effect of transverse shear deformation is applied to a thick plate, its out-of-plane natural frequencies are much different from reality. And so, since Minlin presented a plate theory considering the effect of rotary inertia and transverse shear deformation, many researches for the out-of-plane natural vibration of circular or annular Mindin plates have been performed. But almost all researchers missed the torsional vibration due to transverse shear deformation in axisymmetric out-of-plane vibrations of the circular or annular Mindin plate. Therefore, in this presentation, we verify the existence of torsional vibration of an annular plate and present the natural frequencies of an annular plate with free outer boundary surface.

---

1. 서론

오래 전부터 원형 평판의 면외 진동에 관한 연구가 활발히 진행되어 왔다. 두꺼운 평판의 경우에 횡 전단변형을 무시하는 고전적인 Kirchhoff 평판 이론을 적용하면 면외 고유진동수가 실제와 많이 다르게 되므로 Mindlin[1]이 회전관성 및 횡 전단변형을 고려한 평판 진동식을 제시한 이래로 Mindlin[2], Deresiewicz[3], Rao[4], Irie[5,6] 등 많은 연구자들이 원형 또는 환상 Mindlin 평판의 면외 고유진동에 관한 연구결과를 제시하였다. 그러나 거의 모든 선행 연구자들은 축대칭 면외 진동에서 횡 전단변형으로 인한 비틀림 고유진동을 간과하였다. 따라서 이 발표에서는 환상 Mindlin 평판의 비틀림 고유진동의 존재를 확인하고, 그 특성을 제시하고자 한다.

2. 운동방정식

반경방향으로 r, 원주방향으로 θ에 위치하면서 평판의 중간 면 수선의 반경방향 회전을 ϕ_r, 원주방향 회전을 ϕ_θ, 축 방향 변위를 u_z라고 하면, 외부 반경 a, 내부 반경 b, 두께 h, 밀도 ρ, 영 탄성계수 E, 포아송 비 ν인 균일한 환상 평판의 면외 운동방정식은 응력과 변형도의 관계를 평면응력으로 가정하고 횡 전단변형을 고려하면 다음과 같다.

† 정회원, 인하대학교, 기계공학부, 교수
E-mail : kimcb@inha.ac.kr
TEL : (032)860-7383 FAX : (032)868-1716
* 학생회원, 인하대학교, 기계공학과, 석사과정

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\phi}_r &= -M_{r\theta,r}-\frac{1}{r}M_{\theta\theta,\theta}-\frac{2}{r}M_{r\theta}+Q_{\theta z}\\
\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\phi}_\theta &= M_{rr,r}+\frac{1}{r}M_{r\theta,\theta}+\frac{1}{r}(M_{rr}-M_{\theta\theta})-Q_{rz}\\
\rho h\ddot{u}_z &= \frac{1}{r}Q_{rz}+Q_{rz,r}+\frac{1}{r}Q_{\theta z,\theta}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

여기서 $\ddot{u}=\partial^2u/\partial^2t$, $u_{,r}=\partial u/\partial r$, $u_{,\theta}=\partial u/\partial\theta$이며, 중간 면 수선에 작용하는 굽힘 모멘트 및 전단력은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&(M_{rr},\,M_{\theta\theta},\,M_{r\theta})=\int_{z=-h/2}^{h/2} z\,(\sigma_{rr},\,\sigma_{\theta\theta},\,\sigma_{r\theta})\,dz\\
&(Q_{rz},\,Q_{\theta z})=\int_{z=-h/2}^{h/2}(\sigma_{rz},\,\sigma_{\theta z})\,dz\\
&M_{rr}=D\left[\phi_{\theta,r}+\nu\frac{1}{r}(-\phi_{r,\theta}+\phi_\theta)\right]\\
&M_{\theta\theta}=D\left[\nu\phi_{\theta,r}+\frac{1}{r}(-\phi_{r,\theta}+\phi_\theta)\right]\\
&M_{r\theta}=\frac{D(1-\nu)}{2}\left[-\phi_{r,r}+\frac{1}{r}(\phi_{\theta,\theta}+\phi_r)\right]\\
&Q_{rz}=KGh\left[u_{z,r}+\phi_\theta\right],\;\; Q_{\theta z}=KGh\left[\frac{1}{r}u_{z,\theta}-\phi_r\right]\\
&D=Eh^3/12(1-\nu^2),\;\; G=E/2(1+\nu)
\end{aligned}
$$

상기 식에서 K는 수선에 작용하는 전단응력의 분포를 수정하기 위한 전단계수이며, 5/6 (Reissener[7]), $\pi^2/12$ (Mindlin[8]), $5/(6-\nu)$ (Hutchinson[9]) 등의 값이 제시되었다.

고유진동수 ω, 절 직경 수 n의 정규모드를 다음과 같이 표현하고,

$$
\begin{aligned}
\phi_r(r,\theta,t) &= \{\phi_{rC}(r)\cos n\theta+\phi_{rS}(r)\sin n\theta\}\cos\omega t\\
\phi_\theta(r,\theta,t) &= \{\phi_{\theta C}(r)\cos n\theta+\phi_{\theta S}(r)\sin n\theta\}\cos\omega t\\
u_z(r,\theta,t) &= \{u_{zC}(r)\cos n\theta+u_{zS}(r)\sin n\theta\}\cos\omega t
\end{aligned}
\tag{2}
$$

식(1)에 대입하면 면외 진동이 축대칭인 $n=0$ 경우의 고유진동 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$
-\frac{\omega^2\rho h^3}{12}\phi_{rC}=\frac{D(1-\nu)}{2}\Psi_{rC,r}-KGh\,\phi_{rC} \tag{3a}
$$

$$
-\frac{\omega^2\rho h^3}{12}\phi_{\theta C}=D\Psi_{\theta C,r}-KGh\left[u_{zC,r}+\phi_{\theta C}\right] \tag{3b}
$$

$$
-\omega^2\rho h u_{zC}=KGh\left[u_{zC,rr}+\frac{1}{r}u_{zC,r}+\Psi_{\theta C}\right] \tag{3c}
$$

여기서

$$
\Psi_{rC}=\phi_{rC,r}+\frac{1}{r}\phi_{rC},\;\; \Psi_{\theta C}=\phi_{\theta C,r}+\frac{1}{r}\phi_{\theta C}
$$

식(3b) 및 식(3c)은 $\phi_{\theta C}$와 u_{zC}이 연성된 굽힘 고유진동 방정식이며 선행 연구자들이 유도한 결과와 일치한다. 그러나 식(3a)은 ϕ_{rC}에 관한 비틀림 고유진동 방정식이며, 이 식을 대부분의 선행 연구자들이

간과하였다. 그 이유로는 횡 전단변형을 무시하는 환상 Kirchhoff 평판의 경우에는 전단계수 K를 무한대로 놓으면 식(3a)으로부터 $\phi_{\theta C}=0$이 된다. 또한, 원형 또는 환상 Mindlin 평판의 경우에는 대부분의 선행 연구자들은 식(2)에서 ϕ_{rS}, $\phi_{\theta C}$ 및 u_{zC}만 고려하여 고유진동 방정식을 유도하였기 때문에 $n=0$ 경우의 고유진동 방정식에서는 식(3a)이 나타나지 않게 된다.

3. 비틀림 고유진동

3.1 비틀림 각과 비틀림 모멘트

$x=r/a$라고 하면, 식(3a)의 ϕ_{rC}에 관한 비틀림 고유진동 방정식 및 ϕ_{rC}에 대응하는 비틀림 모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$\left(\nabla_{x1}^2+\mu^2\right)\phi_{rC}=0 \tag{4}$$

$$m_{rC}=\phi_{rC,x}-\frac{1}{x}\phi_{rC} \tag{5}$$

여기서

$$\nabla_{x1}^2=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\frac{1}{x^2},\ \ \mu^2=\gamma^2\left(\lambda^2R\alpha-1\right),$$
$$\lambda^2=\omega^2\rho ha^4/D,\ \ R=h^2/12a^2,\ \ \alpha=D/KGha^2,$$
$$\gamma^2=2/(1-\nu)\alpha,\ \ m_{rC}=-2aM_{r\theta C}/D(1-\nu)$$

상기 식에서 λ는 고유진동수 매개변수, μ는 보조 진동수 매개변수이며 고유진동수 ω는 μ의 함수로 표현되는 다음과 같은 식으로부터 얻어진다.

$$\omega=\sqrt{\left[1+\mu^2/(12Ka^2/h^2)\right](12KG/\rho h^2)} \tag{6}$$

환상 평판의 경우에는 식(4)의 일반해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\phi_{rC}(x)&=AJ_1(\mu x)+BY_1(\mu x) && \text{if}\ \ \mu^2>0\\
\phi_{rC}(x)&=Ax+Bx^{-1} && \text{if}\ \ \mu^2=0\\
\phi_{rC}(x)&=AI_1(|\mu|x)+BK_1(|\mu|x) && \text{if}\ \ \mu^2<0
\end{aligned} \tag{7}$$

여기서 A, B는 적분 상수이고, $J_n(z)$, $Y_n(z)$은 Bessel 함수, $I_n(z)$, $K_n(z)$는 수정된 Bessel 함수이다.
식(7)을 식(5)에 대입하고 Bessel 함수의 반복 공식을 사용하면 비틀림 모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
m_{rC}(x)&=-A\mu J_2(\mu x)-B\mu Y_2(\mu x) && \text{if}\ \ \mu^2>0\\
m_{rC}(x)&=-2Bx^{-2} && \text{if}\ \ \mu^2=0\\
m_{rC}(x)&=A|\mu|I_2(|\mu|x)-B|\mu|K_2(|\mu|x) && \text{if}\ \ \mu^2<0
\end{aligned} \tag{8}$$

3.2 내부 경계면 고정이고 외부 경계면 자유인 경우

$r=b$의 경계면이 고정, 즉 $\phi_{rC}(x=\beta=b/a)=0$이고, $r=a$의 경계면이 자유, 즉 $m_{rC}(x=1)=0$인 경우에는 식(7) 및 (8)을 사용하여 자명하지 않은 해(non-trivial solution)를 구해보면 $\mu^2 \le 0$에 대한 해는 없고, $\mu^2 > 0$에 대한 μ는 다음과 같은 진동수 방정식(frequency equation)을 만족해야 하고,

$$J_2(\mu)\, Y_1(\mu\beta) - J_1(\mu\beta)\, Y_2(\mu) = 0 \tag{9}$$

대응하는 모드 $\phi_{\xi C}(x)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_{\xi C}(x) &= Y_1(\mu x) && \text{if} \quad Y_1(\mu\beta)=0 \\ \phi_{\xi C}(x) &= J_1(\mu x) - \frac{J_1(\mu\beta)}{Y_1(\mu\beta)}\, Y_1(\mu x) && \text{if} \quad Y_1(\mu\beta) \neq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

도표1에는 외부 반경에 대한 내부 반경의 비 β에 대한 보조 진동수 매개변수 μ를 계산하여 제시하였다.

3.3 내부 경계면 자유이고 외부 경계면 자유인 경우

$r=b$의 경계면이 자유, 즉 $m_{rC}(x=\beta)=0$이고, $r=a$의 경계면이 자유, 즉 $m_{rC}(x=1)=0$인 경우에는 식(7) 및 (8)을 사용하여 자명하지 않은 해를 구해보면 $\mu^2<0$에 대한 해는 없고, $\mu=0$에 대한 해는 존재하고 대응하는 모드 $\phi_{rC}(x)$는 x이다. $\mu^2>0$에 대한 μ는 다음과 같은 진동수 방정식을 만족해야 하고,

$$J_2(\mu)\, Y_2(\mu\beta) - J_2(\mu\beta)\, Y_2(\mu) = 0 \tag{11}$$

대응하는 모드 $\phi_{\xi C}(x)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_{\xi C}(x) &= Y_1(\mu x) && \text{if} \quad Y_2(\mu\beta)=0 \\ \phi_{\xi C}(x) &= J_1(\mu x) - \frac{J_2(\mu\beta)}{Y_2(\mu\beta)}\, Y_1(\mu x) && \text{if} \quad Y_2(\mu\beta) \neq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

도표2에는 외부 반경에 대한 내부 반경의 비 β에 대한 보조 진동수 매개변수 μ를 계산하여 제시하였다.

내부 경계면 및 외부 경계면이 자유인 환상 Mindlin 평판의 1차 비틀림 고유진동은 $\mu=0$의 경우이므로 식(6)으로부터 얻어지는 고유진동수 ω는 $\sqrt{12KG/\rho h^2}$ 이다. 반면에 양단이 자유인 공동 봉(hollow shaft)은 경계면이 자유인 환상 평판과 같고, 이와 같은 봉의 1차 비틀림 고유진동수는 $\sqrt{\pi^2 G/\rho h^2}$ 이므로 전단계수 K가 $\pi^2/12$인 경우에는 환상 Mindlin 평판의 1차 비틀림 고유진동수와 일치한다.

4. 결론

모든 선행 연구자들이 간과한 환상 Mindlin 평판의 축대칭 면외 진동에서의 횡 전단변형으로 인한 비틀림 고유진동의 존재를 확인하였다. 또한 내부 경계면이 고정이고 외부 경계면이 자유인 경우와 내부 경계면이 자유이고 외부 경계면 자유인 경우의 균일한 환상 평판의 비틀림 고유진동수와 모드를 보조 진동수 파라미터를 사용하여 제시하였고, 내부 경계면이 자유이고 외부 경계면이 자유인 균일한 환상 평판의 1차 비틀림 고유진동수는 전단계수 K가 $\pi^2/12$인 경우에는 양단이 자유인 공동 봉의 1차 비틀림 고유진동수와 일치함을 알 수 있었다.

참고문헌

1. R. D. Mindlin, "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates," Journal of Applied Mechanics, Vol.18, pp.31-38, 1951.
2. R. D. Mindlin and H. Deresiewicz, "Thickness-shear and flexural vibrations of a circular plate," Journal of Applied Physics, Vol.25, No.10, pp.1329-1332, 1954.
3. H. Deresiewicz and R. D. Mindlin, "Axially symmetric flexural vibrations of a circular disk," Journal of Applied Mechanics, Vol.22, pp.86-88, 1955.
4. S. S. Rao and A. S. Prasad, "Vibration of annular plates including the effects of rotary inertia and transverse shear deformation," Journal of Sound and Vibration, Vol.42, No.3, pp.305-324, 1975.
5. T. Irie, G. Yamada and S. Aomura, "Natural frequencies of Mindlin circular plates," Journal of Applied Mechanics, Vol.47, pp.652-655, 1980.
6. T. Irie, G. Yamada and K. Takagi, "Natural frequencies of thick annular plates," Journal of Applied Mechanics, Vol.49, pp.633-638, 1982.
7. E. Reissner, "The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates," Journal of Applied Mechanics, Vol.12, pp.69-77, 1945.
8. R. D. Mindlin, "Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates," Journal of Applied Physics, Vol.22, No.3, pp.316-323, 1951.
9. J. R. Hutchinson, "Vibrations of thick circular plates, exact versus approximate solutions," Journal of Applied Mechanics, Vol.51, pp.581-585, 1984.

Table 1. Auxiliary frequency parameter μ of torsional vibration of annular Mindlin plates with fixed inner and free outer boundary surfaces

β	0.001	0.2	0.4	0.6	0.8
μ	0.002828 5.136 8.417 11.62 …	0.5956 5.825 9.798 13.74 …	1.392 7.643 12.97 18.24 …	2.810 11.51 19.47 27.37 …	6.825 23.26 39.09 54.85 …

Table 2. Auxiliary frequency parameter μ of torsional vibration of annular Mindlin plates with free inner and free outer boundary surfaces

β	0.001	0.2	0.4	0.6	0.8
μ	0.0 5.136 8.417 11.62 …	0.0 5.222 8.880 12.49 …	0.0 5.966 10.89 16.00 …	0.0 8.227 15.90 23.69 …	0.0 15.86 31.49 47.17 …