잡음인자의 수준결정에 관한 소고

윤원영
부산대학교 산업공학과
서순근
동아대학교 산업경영공학과

A Note on Determining the Level of Noise Factor of Taguchi Method

Won Young Yun
Department of Industrial Engineering, Pusan National University
Sun-Keun Seo
Department of Industrial and Management Systems Engineering, Dong-A University

Key Words: Taguchi method, noise factor,

Abstract

In this note, we deal with a design problem for determining the levels of noise factors in the Taguchi method, give some comments on the proposal in Ree(2009), and compare two proposals by an example.

1. 서론

이상복(2009)은 현장에서 제품이나 공정의 최적조건을 구하는 방법론인 다꾸지(Taguchi) 방법에서 특히 파라메터 설계를 실시할 때 외측배열에 두는 잡음인자의 실험수준을 어떻게 정할 것인가 하는 문제를 다루었다. 그리고 논문에서 다꾸지가 제안한 방법으로 " 잡음인자 수준을 가능하면 많이 선정하여 실험하면 좋지만, 실험이 어려우면 잡음인자의 최대치와 최소치(혹은 좋은조건, 나쁜조건) 2가지 수준에서 실험하라고 제안하였다" 고 언급하고 있다.

그리고 이상복(2009)에는 잡음인자의 수준결정을 제안하고 있는데 잡음인자가 실제현장에서 어떻게 산포하는가에 따라 6가지를 분류하고 각각에 대해 수준결정방법을 제안하고 있다[이상복(2009)의 표 1참고]. 그러나 저자가 제안하는 방법은 기본적으로 잡음인자의 대푯값(주로 평균, 혹은 자주 발생하는 최빈값)을 수준으로 정하여 실험하면 된다고 설명하고 있다. 그러나 기본적으로 다꾸지방법의 원리는 잡음인자에 둔감한 설계변수의 조건(Robust design)을 찾고자하는 것을 목적으로 한다. 그러므로 잡음인자 실험조건을 정하는 경우에도 잡음인자의 전체범위에 대해 안정된 성능, 즉 SN비를 정확하게 추정 가능하도록 실험조건을 정하여야 할 것이다.

본 소고는 잡음인자의 실험조건을 정하는 문제에 대한 다꾸지가 제안하는 내용을 인용하고 예제를 통해 두 방법의 차이를 보이고자 한다.

다꾸지는 잡음인자가 현장에서 평균과 분산을 가지고 나타나는 경우 잡음인자의 성능인자에의 영향이 1차관계인가, 2차관계인가

에 따라 다음과 같이 추천한 것으로 알려져 있다.(Karkar(1988) 참고)

1차관계인 경우 : $(m-s),(m+s)$ 으로 두 수준
2차관계인 경우: $(m-\sqrt{\frac{3}{2}}s),(m),(m-\sqrt{\frac{3}{2}}s)$으로 세 수준

여기서는 기본적으로 잡음인자의 분포가 대칭적임(symmetric distribution)을 가정하는 것으로 되어있다.

그러므로 다꾸지는 잡음인자의 수준결정은 잡음인자의 분포형태 및 모수값과 잡음인자와 성능변수간의 관계에 근거하여 수준을 정하여야 하는 것으로 되어 있다.

2. 잡음인자 수준결정문제

다꾸지방법에서 잡음인자의 수준결정문제는 기본적으로 다음과 같은 다양한 요소들을 고려하여야 한다. 먼저 최적조건의 형태(망대, 망소, 망목, 동적특성 등)가 어떠한가에 따라 최적화의 목적함수가 달라지므로 이것을 고려하여야 한다. 그리고 성능변수와 잡음인자간의 함수형태도 고려하여야 한다. 잡음인자가 다수일 때 잡음인자들간의 상호관계도 고려되어야 한다. 마지막으로 잡음인자가 현장에서 어떻게 분포하는가 즉 잡음인자의 분포도 고려되어야 할 것이다.
지금부터 예제를 통해 잡음인자 수준결정문제를 보다 구체적으로 언급하고자 한다. 그리고 이의 결정방법으로는 이상복(2009)에서 제안된 것과 다꾸지가 제안한 것으로 비교하고자한다.

고려되는 성능변수 Y는 망소특성이라고 가정한다.[망소특성이 가장 모형이 간단하므로 가정함] 잡음인자와의 관계로서 두 가지를 모형을 고려하고자 한다.

1차 모형의 경우

먼저 1차 모형(즉, 잡음인자와 성능변수간에는 1차적인 관계가 있음)

$$Y=\alpha+\beta X+\epsilon$$

여기서 X 는 잡음인자(random factor 로서 고려됨) 이며 평균과 분산이 m,s^2 인 정규분포을 따른다고 하자. 그리고 ϵ 는 다른 잡음인자들의 영향을 고려한 확률변수로서 X 와는 독립이고 평균은 0이고 분산은 σ^2 인 정규분포를 따른다고 한다. 그러면 망소특성의 경우 EY^2를 최소로 하는 조건을 찾고자 하므로 이를 정확하게 추정하여야 한다. 여기서

$$EY^2=(\alpha+\beta m)^2+\beta^2 s^2+\sigma^2 \tag{1}$$

이다.

이를 추정하기 위해 2개의 수준에서 실험을 한다고 하면 먼저 이상복(2009)에서 제안된 방법을 사용한다면 최빈값인 평균에서 2번 실험하면 될 것이다. 그러므로

$$Y_1=\alpha+\beta m+\epsilon$$

에서 2개의 샘플을 구하는 것으로 통계량은 $\frac{Y_{11}^2+Y_{12}^2}{2}$ 이며 그리고

$$E[\frac{Y_{11}^2+Y_{12}^2}{2}]=(\alpha+\beta m)^2+\sigma^2$$

로서 불편추정량이 아니다. 여기서 앞으로의 계산에서 사용을 위해 X 가 평균과 분산이 m,s^2 인 정규분포를 따르면

$$EX^3=m^3+3ms^2$$
$$EX^4=m^4+3s^2(2m^2+s^2)$$
$$Var[X^2]=2s^2(2m^2+s^2)$$

(2)

를 이용하면 위의 통계량의 분산을 구하면

$$Var[\frac{Y_{11}^2 + Y_{12}^2}{2}] = \frac{1}{4}[Var Y_{11}^2 + Var Y_{11}^2]$$
$$= \sigma^2(2(\alpha+\beta m)^2 + \sigma^2) \quad (3)$$

이다.

다꾸지가 제안한 방법으로는

$$Y_{21} = \alpha + \beta(m-s) + \epsilon$$
$$Y_{22} = \alpha + \beta(m+s) + \epsilon$$

이며

$$E[\frac{Y_{21}^2 + Y_{22}^2}{2}] = (\alpha+\beta m)^2 + \beta^2 s^2 + \sigma^2$$

그러므로 기댓값이 식(1)과 같으므로 이 경우 불편추정량이다. 그리고 분산은

$$Var[\frac{Y_{21}^2 + Y_{22}^2}{2}] = \frac{1}{4}[Var Y_{21}^2 + Var Y_{22}^2]$$
$$= \sigma^2(2(\alpha+\beta m)^2 + \sigma^2 + 2\beta^2 s^2) \quad (4)$$

식(3)과 (4)로부터 두 방법의 Mean square error(MSE)를 구하여 보면 이상복(2009)모형의 경우

$$MSE_1 = \sigma^2(2(\alpha+\beta m)^2 + \sigma^2) + \beta^4 s^4$$

이고 다꾸지방법의 경우 MSE는 불편추정량이므로 분산과 동일한

$$MSE_2 = \sigma^2(2(\alpha+\beta m)^2 + \sigma^2 + 2\beta^2 s^2)$$

이다. 두 MSE를 비교하면

$$MSE_1 - MSE_2 = (\beta^2 s^2 - 2\sigma^2)\beta^2 s^2$$

이고 $\beta^2 s^2 < 2\sigma^2$ 인 경우 이상복(2009) 모형이 다꾸지방법보다 MSE가 적게 된다. 이는 잡음인자의 효과가 적고 분산이 상대적으로 적은 경우에 해당한다.

2차 모형의 경우

여기서는 잡음의 영향이 간단한 이차모형인 다음 경우에 대해 다루고자 한다.

$$Y = \alpha + \beta X^2 + \epsilon$$

그러면

$$EY = \alpha + \beta(m^2 + s^2)$$
$$Var Y = \beta^2 Var X^2 + \sigma^2$$
$$EY^2 = \beta^2[2s^2(2m^2+s^2)] + \sigma^2$$
$$+ \alpha^2 + 2\alpha\beta(m^2+s^2) + \beta^2(m^2+s^2)^2$$
$$= \alpha^2 + 2\alpha\beta(m^2+s^2)$$
$$+ \beta^2(m^4 + 6m^2 s^2 + 3s^4) + \sigma^2 \quad (5)$$

망소특성이므로 각 실험조건에서 EY^2를 추정하기 위해 3개의 수준에서 실험을 한다고 하자. 먼저 이상복(2009)에서 제안된 방법을 사용한다면

$$Y_1 = \alpha + \beta m^2 + \epsilon$$

이며 $Y_1 \sim N(\alpha + \beta m^2, \sigma^2)$ 이다. 이 분포에서 3개의 샘플을 구하는 것으로 통계량은

$$\frac{Y_{11}^2 + Y_{12}^2 + Y_{13}^2}{3}$$

이며 이것은

$$E[\frac{Y_{11}^2 + Y_{12}^2 + Y_{12}^2}{3}] = (\alpha + \beta m^2)^2 + \sigma^2$$

로서 식(5)와 비교하면 참값을 과소 추정하는 편의추정량이다. 그리고 추정량의 분산은 식(2)로부터

$$Var[\frac{Y_{11}^2+Y_{12}^2+Y_{12}^2}{3}] = 3\,Var\,Y_{11}^2$$
$$= 6\sigma^2[2(\alpha+\beta m^2)^2+\sigma^2]$$

로 주어진다.

다꾸지가 제안한 방법으로는

$$Y_{21} = \alpha+\beta(m-\sqrt{\frac{3}{2}}s)^2+\epsilon,$$
$$Y_{22} = \alpha+\beta m^2+\epsilon$$
$$Y_{23} = \alpha+\beta(m+\sqrt{\frac{3}{2}}s)^2+\epsilon,$$

로서

$$E[\frac{Y_{21}^2+Y_{22}^2+Y_{23}^2}{3}] =$$
$$\frac{1}{3}[(\alpha+\beta(m-\sqrt{\frac{3}{2}}s)^2)^2$$
$$+(\alpha+\beta m^2)^2+(\alpha+\beta(m+\sqrt{\frac{3}{2}}s)^2)^2$$
$$+3\sigma^2]$$
$$=\frac{1}{3}[3\alpha^2+\beta^2(3m^4+18s^2m^2+\frac{9}{2}s^4)$$
$$+2\alpha\beta(3m^2+3s^2)+3\sigma^2]$$
$$=[\alpha^2+\beta^2(m^4+6s^2m^2+\frac{3}{2}s^4)$$
$$+2\alpha\beta(m^2+s^2)+\sigma^2] \tag{6}$$

그리고 식(6)과 식(5)를 비교하면 이 추정량은 정확히 불편추정량은 아니지만 근사적으로 접근함을 알 수 있다. 그리고 추정량의 분산은 다음과 같이 구해진다.

$$Var[\frac{Y_{21}^2+Y_{22}^2+Y_{23}^2}{3}] =$$
$$\frac{2\sigma^2}{9}[2(\alpha+\beta(m-\sqrt{\frac{3}{2}}s)^2)^2$$
$$+2(\alpha+\beta m^2)^2+2(\alpha+\beta(m+\sqrt{\frac{3}{2}}s)^2)^2+3\sigma^2]$$
$$=\frac{4\sigma^2}{9}[3\alpha^2+\beta^2(3m^4+18s^2m^2+\frac{9}{2}s^4)$$
$$+2\alpha\beta(3m^2+3s^2)+\frac{3}{2}\sigma^2]$$
$$=\frac{2\sigma^2}{3}[2\alpha^2+\beta^2(2m^4+12s^2m^2+3s^4)$$
$$+4\alpha\beta(m^2+s^2)+\sigma^2]$$

그리고 두 추정량의 MSE는 다음과 같다.

$$MSE_1 = 6\sigma^2[2(\alpha+\beta m^2)^2+\sigma^2]$$
$$+[2\alpha\beta s^2+\beta^2(6m^2s^2+3s^4)]^2 \tag{7}$$

이고

$$MSE_2 = \frac{2\sigma^2}{3}[2\alpha^2+\beta^2(2m^4+12s^2m^2+3s^4)$$
$$+4\alpha\beta(m^2+s^2)+\sigma^2]+\frac{9}{4}\beta^4s^8 \tag{8}$$

그러므로 식(7)과 (8)의 두 MSE를 비교하여 보면 오차의 분산에 비해 잡음인자의 분산이 상대적으로 큰 경우는 다꾸지의 방법이 보다 정밀한 추정이 가능함을 알 수 있다. 예를 들어 $\alpha=1,\ \beta=1, \sigma=1, m=1,$ $s=1$ 인 경우를 비교하면 그 차이가 매우 큼을 바로 알 수 있을 것이다.

결론

본 논문에서는 다꾸지 실험설계에서 잡음인자의 실험조건을 정하는 문제를 다루었다. 특히 이상복(2009)의 연구에서 제시된 최적실험조건의 결정방식은 정확한 근거가 부족한 면이 있으면 특히 현장에서의 잡음의 분산이 큰 경우는 다꾸지방법에서 제안하는 경우보다 최적이라고 할 근거가 미약함을 몇 가지 예를 통해 언급하였다. 그러나 이 소고에서 다룬 모형보다는 보다 일반적인 경우(잡음인자와 설계변수(변량인자)의 교호작용을 고려한 모형 등)에 대한 분석이 요구되며 특히 다양한 측면에서의 최적결정 방법에 대한 검토가 요구된다.

참고문헌

1. Kackar, R.N.(1985), Off-line quality control, parameter design, and the Taguchi method, Journal of Quality

Technology, Vol. 17, 176-206.

2. 이상복(2009), “다양한 확률분포하에서 다꾸지 기법의 잡음인자수준정하는 방법”, 품질경영학회지, 37 권, 4호, 10-15.