

## 지오이드와 탄성파 토모그래피 모델의 오차가 맨틀 점성 (viscosity) 추정에 미치는 영향

이춘기<sup>1)</sup>, 한신찬<sup>2)</sup>, Bernhard Steinberger<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> 극지연구소, 극지지구시스템연구부, cklee92@gmail.com

<sup>2)</sup> NASA Goddard Space Flight Center, Planetary Geodynamics Laboratory

<sup>3)</sup> GFZ German Research Centre for Geosciences, Helmholtz Centre Potsdam

### Influence of noise in geoid and seismic tomography model on constraining mantle viscosity from geoid observations

Choon-Ki Lee<sup>1)</sup>, Shin-Chan Han<sup>2)</sup>, and Bernhard Steinberger<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Division of Polar Earth-System Sciences, KOPRI

<sup>2)</sup> Planetary Geodynamics Laboratory, NASA GSFC

<sup>3)</sup> Helmholtz Centre Potsdam, GFZ GRCG

#### 서론

Hager and O'Connell (1981)은 밀도차에 의해 발생하는 맨틀의 흐름이 밀도경계면을 변형시키며 이 동역학적 변형이 밀도차 자체보다 지오이드에 더 큰 영향을 준다는 이론으로 맨틀의 3차원 밀도 구조와 전지구적 관측 중력간의 역의 상관관계를 설명하였다. 맨틀의 점성(viscosity)은 밀도경계면의 동역학적 변형을 좌우하는 주요 변수 중 하나이므로 3차원 밀도 모델과 지오이드 관측자료로부터 점성의 추정(역산)이 가능하다. 하지만 Hager and Richards (1989)등의 몇몇 연구들은 상부맨틀로부터 하부맨틀로 갈수록 점성이 점진적으로 증가하는 결과를 얻은 반면 King and Masters (1992)등은 깊이 400~670km 구간의 전이대(transition zone)가 상부맨틀보다 더 낮은 점성을 가진다는 결과를 얻어 논쟁의 여지가 남아있다. 이러한 맨틀 점성 해의 불확실성은 표면 경계 조건, 압축성, 화학적 층서구조, 상전이, 수평방향으로의 점성 변화 등 많은 요인에 기인한다. 또한 탄성파 토모그래피 모델로부터 변환되는 맨틀내 밀도 모델 역시 무시할 수 없는 불확실성을 가지고 있어 점성의 역산 과정에 왜곡을 가져올 수 있다.

일반적으로 탄성파 토모그래피 모델로부터 맨틀내의 밀도 모델을 정의해 놓고 맨틀의 점성 구조에 따라 예측된 지오이드와 전지구적으로 관측된 지오이드의 최소자승 오차를 최소화하는 방법으로 점성구조를 역산한다. 이러한 방법은 일반적인 지구물리학적 역산과 같이 모델보다 관측치가 부정확하다는 가정 하에 역산이 이루어지는 것이다. 그러나 실제로 GRACE 등과 같은 인공위성 중력자료의 획득으로 지오이드의 정확도는 충분히 향상되었기 때문에 관측치의 오차보다 모델에 의해 계산된 예측치의 오차가 훨씬 크다. 이 연구에서는 맨틀 점성의 역산 과정에서 탄성파 토모그래피 모델에 존재하는 불확실성이 맨틀 점성 역산에 미치는 영향을 고찰하고 그 영향을 최소화하는 방법을 모색하였다.

이를 위해 Total Least Squares (TLS) 방법을 적용하여 기존의 Least Squares (LS) 방법에 의존하는 역산과 비교하였다.

### 지오이드 모델

지오이드에 대한 유체역학적 모델은 질량 보존, 모멘텀 보존, 포와송 방정식에 의해 유도될 수 있다. 그 해는 밀도 구조와 소위 말하는 지오이드 커널의 적분 형태로 주어진다.

$$N_{lm} = \frac{3}{2l+1} \frac{1}{\bar{\rho}} \int_{R_{CMB}}^{R_E} \delta\rho_{lm}(r) G_l(r) dr, \quad (1)$$

여기서  $N_{lm}$  은 차수  $l, m$ 의 지오이드,  $\delta\rho_{lm}(r)$  밀도차,  $G_l(r)$  은 지오이드 커널 (점성구조에 대한 비선형 함수),  $\bar{\rho}$  는 지구평균밀도,  $R_E$  는 지구반경,  $R_{CMB}$  는 핵-맨틀 경계를 의미한다. 밀도차  $\delta\rho_{lm}(r)$  는 탄성과 토모그래피(속도) 모델과 밀도-속도 변환계수(density-to-velocity scaling factor)로부터 얻어진다.

### 맨틀 점성 계수 최적화: LS vs. TLS

지구의 점성구조는 지각권(0-100km), 상부맨틀(100-400km), 전이대(400-670km), 하부맨틀(670-2891km)로 구성된 4층 모델로 가정하였다(외핵은 유체이므로 점성이 없는 것으로 가정한다). 지오이드는 점성계수들의 상대적인 차이만을 반영하므로 하부맨틀의 점성계수는  $10^{22}$  Pa s 로 고정하였으며 지각권의 점성계수는 상부맨틀과 전이대에 비해 지오이드에 대한 민감도가 매우 낮기 때문에 하부맨틀과 같은 값으로 가정하여 상부맨틀과 전이대의 점성계수만을 반복적인 순산모델링을 통해 최적화하였다. 지오이드 관측치는 GRACE 위성으로부터 얻어진 GGM02S 중력모델을 이용하였으며 GGM02S의 오차 추정치는 차수 70까지 약 7mm이다.

LS 방법은 다음과 같은 목적함수(최소자승오차)를 최소화함으로써 각 층의 점성계수를 최적화한다.

$$\psi_{LS}(\mathbf{h}) = \sum_{l=l_{\min}}^{l_{\max}} \sum_{m=-l}^l (N_{lm}^{obs} - N_{lm}^{mod}(\mathbf{h}))^2, \quad (2)$$

여기서  $N_{lm}^{mod}$  과  $N_{lm}^{obs}$  은 모델의 예측치 및 관측치의 구면좌화계수이고,  $\mathbf{h}$  는 각 층의 점성계수를 나타내는 벡터이다.  $N_{lm}^{mod}$  는 식 (1)에 의해 계산되어지는데 식 (1)의 밀도차  $\delta\rho_{lm}(r)$  는 불확실성이 존재함에도 불구하고 LS 방법에서는 전혀 고려되지 않는다. 실제적으로 지오이드 관측치  $N_{lm}^{obs}$  에 비하여  $\delta\rho_{lm}(r)$  의 불확실성이 훨씬 크기 때문에 이 연구에서는  $\delta\rho_{lm}(r)$  에 포함되어 있는 오차를 고려한 목적함수를 도입하였다.

TLS 방법은 선형시스템을 구성하는 모델상수들의 오차를 고려하는 최소자승법으로서 각 모델상수들이 서로 다른 오차를 가지는 경우를 element-wise weighted total least squares (EW-TLS)라고 부른다 (De Moor, 1993). Markovsky et al. (2006)의 방법에 의해 EW-TLS의 목적함수는 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\psi_{TLS}(\mathbf{h}) = \sum_{l=l_{\min}}^{l_{\max}} \sum_{m=-l}^l \frac{\{N_{lm}^{obs} - N_{lm}^{mod}(\mathbf{h})\}^2}{\mathbf{K}_l(\mathbf{h})^T \mathbf{V}_{lm}^A \mathbf{K}_l(\mathbf{h}) + V_{lm}^Y}, \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{K}_l$  은 지오이드 커널과 밀도-속도 변화계수를 포함하는 벡터이며,  $\mathbf{V}_{lm}^A$  는 탄성과 토모그래피 모델의 공분산 행렬이며,  $V_{lm}^Y$  은 지오이드 관측치의 분산을 의미한다. 그러나 현재 잘 알려져 있는 탄성과 토모그래피 모델들은 공분산 행렬을 함께 제공해주지 않기 때문에 이 연구에서는 현재 보편적으로 사용되고 있는 6개의 S파 속도 토모그래피 모델들 간의 공분산을 평균 토모그래피 모델의 공분산으로 가정한다.

## 결과

지구 밀도 구조의 계산을 위해 6개의 S파 속도 토모그래피 모델들(s20rts, sb4118, saw24b16, s362d1, ngrand, s20a)을 사용하였다. 밀도-속도 변환 계수와 구면조화계수 차수의 영향을 함께 보기 위해 6가지의 변환계수를 사용하고, 구면조화계수의 차수를 4개의 구간으로 나누어 테스트하였다. Fig. 1에서 보는 것과 같이, LS 방법에 의해 최적화된 점성 구조는 6개의 토모그래피 모델과 6개의 밀도-속도 변환계수에 상관없이 비슷한 경향을 보인다. 하지만 흥미로운 점은 최적화에 사용되는 구면조화계수의 차수에 따라 해가 매우 다르게 나타나는 점이다.  $l=2-12$ 의 자료를 사용하는 경우, 최적 점성 구조는 Ricard et al. (1989), King and Masters (1992), Soldati et al. (2009) 등에 의해 얻어진 점성 구조와 유사하다. 가장 낮은 점성은 400-670km 구간의 전이대에서 나타나며 하부맨틀의 점성은 전이대보다 수십배 높다. 그러나 차수가 증가할수록 두 구간의 점성계수는 역전되는 것을 볼 수 있다.

토모그래피 모델에 포함된 오차가 점성계수의 최적화에 미치는 영향을 살펴보기 위하여 합성자료를 이용하여 시뮬레이션을 실시하였다. 5가지의 점성구조를 가정하여 합성 지오이드 자료를 생성하고 무작위 잡음을 첨가한 토모그래피 모델을 이용하여 점성계수의 최적화를 200회 반복 실시하여 해의 분포를 살펴보았다(Fig. 2). 토모그래피 모델에 포함된 무작위 잡음으로 인해 점성계수의 해는 분산되어 나타나며 이와 함께 해의 편향성(bias)이 함께 나타나는 것을 확인할 수 있다. 특히 상부맨틀과 전이대의 점성이 비슷할 경우 바이어스는 구면조화계수의 차수에 따라 두 층의 점성계수가 서로 역전되는 형태를 만들어 낸다. 이는 Fig. 1에서 관찰된 점성계수의 해가 차수의 증가에 따라 역전되는 것이 토모그래피 모델의 불확실성에 기인할 수 있음을 말한다. 합성자료에 대한 시뮬레이션에 TLS 방법을 적용한 결과를 Fig. 3에 도시하였다. TLS 방법은 토모그래피 모델 내의 불확실성이 큰 계수에 대한 영향을 최소화함으로써 LS방법에서 나타나는 심각한 편향성을 완화시켜준다. Fig.4는 TLS 방법에 의해 실제 GRACE 지오이드 관측치에 최적화된 점성 구조 해를 나타낸다. Fig. 1에서 제시된 LS 방법에 의한 해와는 달리 구면조화계수의 차수에 따른 해의 변화가 크게 완화되었으며 상부맨틀과 전이대의 점성이 크게 다르지 않다.

## 결론

이 연구는 탄성과 토모그래피 모델로부터 변환되는 3차원 밀도 구조의 불확실성이 맨틀 점성의 분석에 미치는 영향을 합성자료와 GRACE 중력 자료에 대한 시뮬레이션을 통해 제시하였다. 단지 관측치에 포함된 잡음만을 고려하는 LS 방법은 모델에 존재하는 오차로 인해 편향된 점성 해에 산출해내는 것으로 밝혀졌으며 탄성과 토모그래피 모델의 공분산을 고려하여 관측치와 예측치의 차이를 최소화하는 TLS방법은 점성 해의 편향성을 감소시켜주는 결과를 보여준다. LS 방법의 편향성으로 인해 나타나는 구면조화계수의 차수에 따른 해의 비유일성은 TLS 방법에 의해 상당히 완화되며 TLS 방법에 의한 해는 상부맨틀과 전이대의 점성계수가 거의 비슷한 수준인 점성구조를 보여준다.

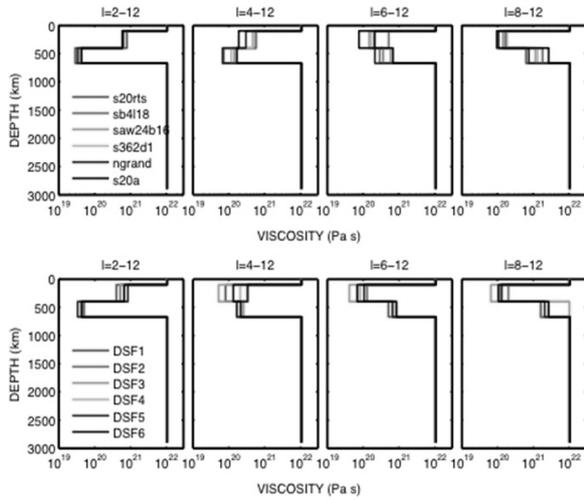


Figure 1. Best-fitting viscosity profiles by changing tomography models but keeping a scale factor with DSF6 (upper panels) and by changing scale factor profiles but keeping the mean tomography model (lower panels), for four cases of the geoid spectral band. The lithosphere viscosity is set to be the same as the one within the lower mantle.

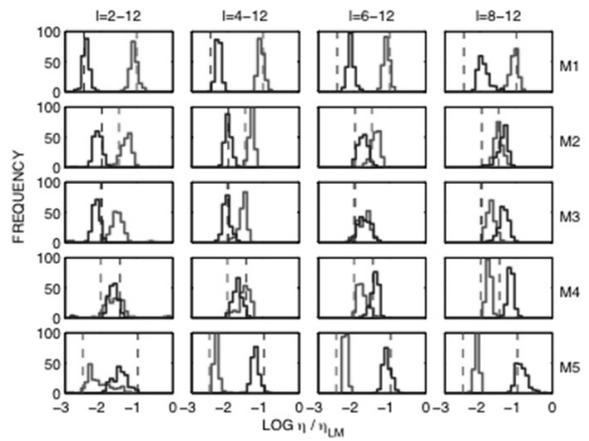


Figure 2. Distribution of the viscosity solutions and the 'truth' viscosity used in the simulations with noisy tomography models. The multiple tomography models are randomly generated with the covariance matrix determined from six tomography models. The transition zone viscosity  $\eta_{TZ}$  (blue) and upper mantle viscosity  $\eta_{UM}$  (red) are estimated from total 200 noisy tomography models and from the same synthetic observation. Each row shows the simulations for various viscosity structures (M1 – M5). The dashed blue and red lines indicate the 'truth' viscosity.

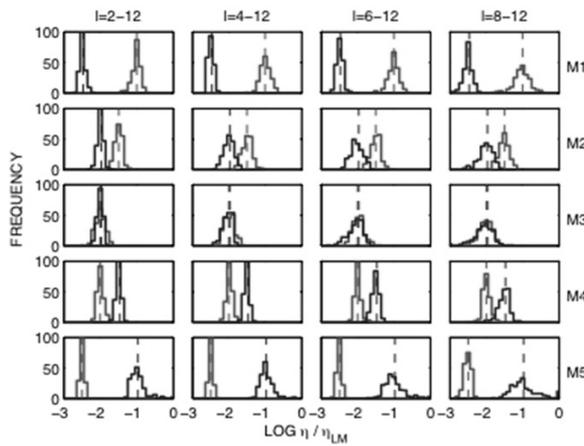


Figure 3. As for Figure 2, but from the TLS method.

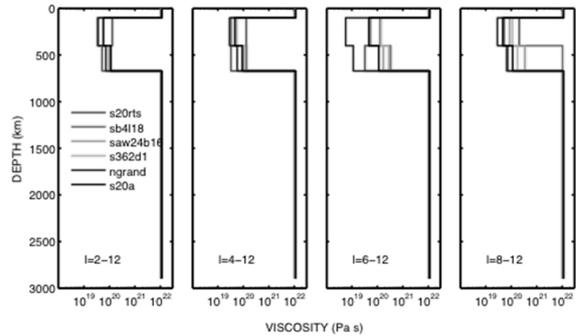


Figure 4. Best-fitting viscosity profiles estimated with six tomography models based on the TLS approach.