

# 격자 제한 리스트 스피어 디코딩

\*전명운 \*\*이정우

서울대학교 전기컴퓨터공학부, 뉴미디어통신공동연구소

\*[ifindme@wspl.snu.ac.kr](mailto:ifindme@wspl.snu.ac.kr) \*\*[junglee@snu.ac.kr](mailto:junglee@snu.ac.kr)

## Limited Constellation List Sphere Decoding

\*Jeon, Myeongwoon \*\*Lee, Jungwoo

Seoul National University EECS, INMC

### 요약

스피어 복호 알고리즘 (sphere decoding algorithm)은 다중 입출력 (MIMO) 통신 시스템에서 사용되는 복호기중 최대 우도 복호기 (Maximum Likelihood Detector)와 비슷한 BER(bit error rate)성능을 가지고 복잡도를 줄일수 있어서 최근 많이 연구 되어 왔다. 이때 공간 다중화와 채널 부호의 연접시스템에서 연관정 정보(Soft output information) 를 스피어 복호 알고리즘을 통해 생성하기 위한 방법으로 리스트 스피어 복호 알고리즘 (List Sphere Decoding)이 알려져있다. 기존 리스트 스피어 디코딩 알고리즘은 리스트를 반지름을 업데이트 하지 않으므로 탐색시 복잡도가 매우 높다는것이 문제가 되므로, 차원별로 최적해의 가능성이 높은 격자 주변으로 검색을 제한하여 복잡도를 줄이는 알고리즘을 제안하고 성능과 복잡도를 실험한다.

## 1. 서론

최근 고속 데이터를 송수신을 위해 다중 입출력 (Multiple Input Multiple Output) 통신 시스템 연구가 활발히 이루어져왔으며, 이에 따라 MIMO 시스템의 수신단에서 사용되는 복호 알고리즘의 연구도 많이 이루어졌다. 복호 알고리즘 중에서는 ML 복호기 (Maximum Likelihood detector)가 가장 좋은 성능을 보이지만 복잡도가 매우 높아 실제 구현하기가 어렵기 때문에, 이를 대체하기 위하여 ZF (Zero Forcing) 이나 MMSE (Minimum Mean Square Error) 같은 선형 복호기가 사용해 왔다. 하지만 점차 밀도 높은 데이터 송수신을 위해 Modulation Order이 상승함에 따라 이들 보다 BER (Bit Error Rate) 성능이 향상된 수신기를 필요로 한다. 이에 MMSE V-BLAST (Vertical Bell Labs Layered Space-Time)같은 비선형 복호기가 개발되었지만 여전히 최적인 ML 복호기의 성능에는 접근하지 못하고 있다. 이에 ML의 성능에 근접하면 복잡도를 줄인 스피어 복호기(Sphere Decoder)가 연구되고 있다. ML이 성좌내의 모든 벡터를 대입하여 그 유클리드 거리가 최소인 해를 찾아내는데 비해, 스피어 복호기는 트리 검색을 통해 성좌내의 벡터들을 레벨 별로 대입해나가며 일정한 거리 이상, 즉 스피어의 반지름을 넘어가는 벡터에 대해서는 검색을 중단함을 통해 상당한 복잡도 감소를 가능하도록 한다[1].

스피어 복호기와 채널부호와의 연접 시스템을 사용할 때 연관정 정보(Soft output information)가 필요한 경우가 발생하는데, 이를 위해서 리스트 스피어 복호 알고리즘 (List Sphere Decoding)이 제안되었다. 리스트 스피어 복호 알고리즘은 기존 MAP 알고리즘이 모든 벡터를 검색하여 LLR (log-likelihood ratio)계산을 함에 비해, 스피어 복호 알고리즘을 이용하여 일부 가능성이 높은 벡터 리스트 집합을 만들고 이 리스트를 통해 연관정 정보를 알아낼수 있다. 따라서 MAP 알고리즘에 비해 큰 복잡도 감소효과를 얻는다[2].

하지만 List Sphere Decoding은 List가 채워질때까지는 Sphere

Decoding 에서와 같이 반지름을 줄이지 못하는 특성으로 인해 방문 노드수가 크기 때문에 복잡도를 더 줄여야 할 필요성이 있다. 이를 개선하기 위해 List의 수가 완료된 후부터 기존 Sphere Decoding의 Schnorr-Euchner 알고리즘과 같이 Adaptive하게 반지름을 줄이는 알고리즘을 사용할 수 있지만, List가 완료 될 때까지는 여전히 복잡도가 크다는 문제가 있다[3][4].

본 논문에서는 List Sphere Decoding의 복잡도를 더욱 개선하기 위해 차원별 격자 제한 List Sphere Decoding을 제안한다. 차원별 격자 제한은 MIMO 시스템에서 각 차원별 Constellation에서 추정가능성이 높은 점 주변 원으로 제한 하여 차원별 원밖에 있는 점들에 대해서는 검색하지 않는 방식이다. Modulation Order가 높을수록, 송수신 차원 수가 늘어날수록 복잡도 감소비율 폭은 급격히 늘어나게 되며, 가능성이 높은 벡터 주위만을 검색 하므로 BER 성능에서 약간 열화되는 Trade off 특성을 보이지만, 복잡도 감소폭이 크다는점을 이용하여 실용적으로 적용할 수 있다.

본 논문은 아래와 같이 구성되어있다. 2장에서는 스피어 복호기 리스트 스피어 복호기에 관하여 3장에서는 차원별 격자 제한 리스트 스피어 디코딩 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 알고리즘의 BER 성능과 복잡도에 관한 전산실험 결과를 보여주고 마지막으로 5장에서 결론을 맺도록 한다

## 2. 스피어 디코딩

### 가. 스피어 디코딩 알고리즘

$y$ 는 수신신호,  $H$ 는  $N \times M$ 채널 행렬,  $x$ 는 송신신호,  $n$ 은 잡음벡터라 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$y = Hx + n \quad (1)$$

이때, Maximum likelihood의 식은 아래와 같다.

$$x_{ML} = \arg \min_{x \in \Omega} \|y - H\hat{x}\|^2 \quad (2)$$

스피어 디코딩은 수신신호와 격자벡터사이의 길이가 반지름보다 작아야 하므로,

$$\|y - H\hat{x}\|^2 < r^2 \quad (3)$$

채널행렬 H를 QR decomposition을 사용하여 분해한 후 이를 적용하면,

$$H = Q \begin{bmatrix} R \\ 0_{(N-M) \times M} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\|y - [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}\|^2 < r^2 \quad (5)$$

$$\left\| \begin{bmatrix} Q_1^H \\ Q_2^H \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x} \right\|^2 < r^2 \quad (6)$$

$$\|Q_1^H y - R\hat{x}\|^2 + \|Q_2^H y\|^2 < r^2 \quad (7)$$

두번째 항은 수신신호와 채널 행렬에 의해 고정된 값이므로 이를 정리하면

$$r'^2 \equiv r^2 - \|Q_2^H y\|^2 \quad (8)$$

$$y' \equiv Q_1^H y = [y'_1, y'_2, \dots, y'_m]^T \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \|y' - R\hat{x}\| \\ &= (y'_m - r_{m,m}\hat{x}_m)^2 + (y'_{m-1} - r_{m-1,m}\hat{x}_m - r_{m-1,m-1}\hat{x}_{m-1})^2 \\ &+ \dots + (y'_1 - r_{1,m}\hat{x}_m - r_{1,m-1}\hat{x}_{m-1} - \dots - r_{1,1}\hat{x}_1)^2 \leq r'^2 \end{aligned} \quad (10)$$

이 식을 만족하는 x벡터를 찾아내려면 위 항의 첫번째 항이 반지름을 넘는지 검사하고 만약 괜찮으면 그 다음 항까지 누적하여 더하여 반지름을 넘는지 조사하는 방식으로 구현할 수 있다. 이때 각 항이 각 차원을 얘기하며, 특정 차원에서 반지름을 넘어간다면 중단하고 다음 벡터를 이용하여 검색을 계속 해 나간다. 이 검색 구조를 트리 구조로 변화시켜 시각화 할 수 있다.

### 나. 리스트 스피어 디코딩 (List Sphere Decoding)

연관성 정보를 이용한 수신기로 반복 디코딩 (Iterative decoding)을 이용한 MAP (Maximum A Posteriori) 수신기에서는 다음과 같은 LLR값의 계산이 필요하다.

$$L_D(x_k | y) = \ln \frac{P[x_k = +1 | y]}{P[x_k = -1 | y]} \quad (11)$$

이때 외부 정보값의 계산식을 Jacobian Logarithm을 이용하여 근사하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_E(x_k | y) &\approx \frac{1}{2} \max_{x \in X_{k,+1}} \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \|y - H \cdot s\|^2 + x_{[k]}^T \cdot L \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \max_{x \in X_{k,-1}} \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \|y - H \cdot s\|^2 + x_{[k]}^T \right\} \right. \end{aligned} \quad (12)$$

이때 k번째가 1 또는 -1인 벡터 전부를 비교해야하므로 복잡도가 아주 높는데, 이 부분을 Sphere Decoding 알고리즘을 사용하여 신뢰도가 높은 일부 벡터들로 List를 만들어 이를 통해 외부 정보 값을 구하면 성능을 어느정도 유지하면서 복잡도를 급격히 줄일수 있으며, 이때 List구하는 알고리즘을 List Sphere Decoding이라 한다.

$$\begin{aligned} L_E(x_k | y) &\approx \frac{1}{2} \max_{x \in \Omega \cap X_{k,+1}} \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \|y - H \cdot s\|^2 + x_{[k]}^T \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \max_{x \in \Omega \cap X_{k,-1}} \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \|y - H \cdot s\|^2 + x_{[k]}^T \right\} \right. \end{aligned} \quad (13)$$

List Sphere Decoding은 Sphere Decoding과 달리 최적해 하나가 아니라 임의의 수만큼의 벡터들의 집합을 구해야 하므로, 원하는 후보 벡터 수 만큼 탐색이 되지 않았다면, 탐색중에 반지름을 줄일수 없다. 하지만 Sphere Decoding에서는 반지름의 값이 복잡도에 큰 영향을 미치므로, 이를 보완하기 위한 한가지 방법으로, 원하는 벡터 수만큼이 탐색된 이후부터는 Schnorr-Euchner 알고리즘의 반지름 설정과 같이 적응적으로 반지름을 조정하여 복잡도를 낮출 수 있다.

## 3. 격자 제한 리스트 스피어 디코딩

### 가. 격자 제한 (Limited Constellation)

Sphere Decoding은 기본적으로 차원별로 나누어 계산하지만, 탐색 벡터의 제외 여부는 누적된 Distance로 판별한다. 이와 별개로 각 차원별로 4X4 MIMO를 가정한 그림x와 같이 가능성 높은 초기 벡터값 주변에 2차원적인 원을 그려서 그 안의 lattice point에 대해서만 Sphere Decoding을 적용한다면, 방문하는 노드수가 급격하게 줄어들게 된다. 이때 초기벡터는 ZF나 MMSE와 같은 복잡도 낮은 선형 수신기의 벡터를 사용할 수 있다. 따라서 격자 제한 알고리즘은 기존 Sphere의 제한에 추가로 차원별 Circle 제한을 하므로 이중으로 제한하여 복잡도를 낮추는 알고리즘이라 할 수 있다.

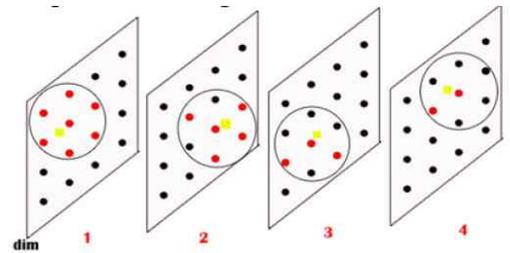


그림 1 차원별 격자 제한 알고리즘

### 나. 격자 제한 리스트 스피어 디코딩 (Limited Constellation List Sphere Decoding)

격자 제한의 아이디어를 이용하여 List Sphere Decoding에 적용하

면, 가능성 높은 초기 벡터값 주변 벡터들의 조합 벡터들중 Distance가 작은 값들로 임의의 지정한 수의 후보 벡터 집합을 구성 할 수 있다. 다만 초기 벡터 주변 벡터들의 조합 벡터 수가 List로 원하는 후보 벡터 수보다는 충분히 커야 한다. 이때 벡터들을 탐색하는 중 원하는 수 만큼의 후보 벡터 list가 채워지기 전까지는 초기에 설정해 놓은 반지름을 함부로 줄여서는 안되고, 다 채워진 이후에는 현 후보 벡터 집합 내의 최대 Distance를 반지름으로 사용하여 이보다 작은 Distance의 값을 가지는 벡터들이 탐색될경우 기존 List의 벡터와 교체하는 방식으로 탐색을 계속해 나간다.

기존 MAP 수신기 방식에 비해서, Sphere Decoding의 기본 알고리즘과 추가로 격자제한 알고리즘을 적용하므로 복잡도는 급격히 낮아진다. 예를들어 4X4 MIMO 시스템에서 64QAM의 변조 방식을 사용한다 가정하면, 기존 MAP 수신기에서 탐색해야할 vector수는  $(64)^4 = 2^{24}$ 만큼의 벡터를 비교하여 연관정 정보를 얻어낸다. 하지만 격자 제한 알고리즘을 적용하고, 만약 격자 제한을 한 차원당 25개만큼의 벡터로 제한한다면  $(25)^4 = 5^8$ 만큼의 벡터를 탐색해야하므로 기본적으로 탐색해야할 벡터수가 무려 97.6% 감소하며, 여기서 Sphere Decoding을 이용하면 탐색할 벡터수를 추가로 급격하게 줄여준다. 다만 Sphere Decoding은 NP 문제이며, 탐색해야할 노드 수에 관하여 정확한 수치를 유도하기는 어렵고, 실험적 추정치 수월하다.

#### 4. 성능 분석

성능을 분석하는데 있어서, 에러율 측면과 복잡도 측면에서 보고자 한다. 먼저 BER성능을 SNR에 따라서 측정해본다. 그림 x에는 기존의 수신기들과 스피어 디코딩 수신기와, 제안된 격자 제한 리스트 스피어 디코딩(Limited Constellation - List Sphere Decoding, LC-LSD)과 적응적 반지름을 적용한 List Sphere Decoding (LSD-Adaptive) 알고리즘의 성능을 비교한다. 4x4 MIMO, 64 QAM 시스템을 가정했으며 LC-LSD알고리즘에서 격자 제한 수는 차원당 25개로 설정 하였다.

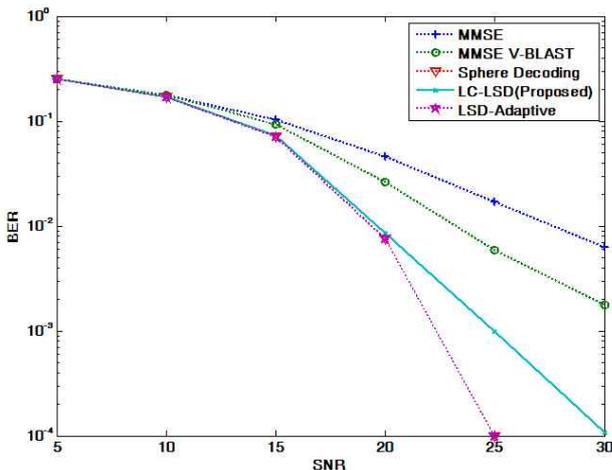


그림 2 LSD의 BER성능

LC-LSD가 낮은 SNR에서는 Optimal에 가까운 LSD-Adaptive 알고리즘과 비슷한 성능을 보이고, 높은 SNR에서 상대적인 성능 열화가 보인다. 이는 높은 SNR에서는 BER이  $10^{-3}$ 미만으로 낮기 때문에, 제한된 격자 벡터를 벗어난곳에 존재하는 소수의 해로 인한 영향이 상대적으로 커보이기 때문으로 분석된다.

그래프에서 Sphere Decoding은 LSD에 비해 복잡도가 매우 낮지만, LSD와 달리 연관정 정보를 생성해 내지 못하므로 연관정 정보를 이용한 채널코딩을 적용하였을 때 BER 성능이 차이 날수 있으므로 이

실험으로 SD와 LSD와 BER 절대성능을 비교하는것은 어렵다.

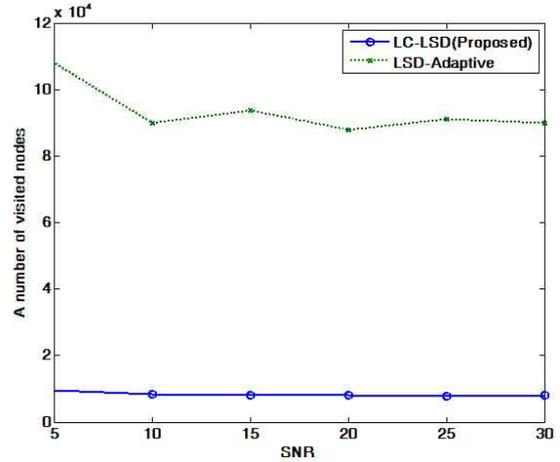


그림 3 LSD의 평균 방문 노드 수

복잡도 측면을 알아보기 위해 List Sphere Decoding의 두 알고리즘의 탐색시 방문 노드 수를 비교한다. LSD-Adaptive 알고리즘도 기존 Original LSD에 비해서 적응적 반지름을 사용하므로 복잡도가 낮은편이지만, LC-LSD는 이보다 약 1/10배로 방문 노드수가 적음을 확인할 수 있다.

#### 5. 결론

채널 코딩에 필요한 연관정 정보를 얻기 위해, List Sphere Decoding을 실용적으로 이용하기 위해서는 큰 복잡도 감소가 필수적이고, 차원별 격자 제한 리스트 스피어 디코딩 알고리즘은 약간의 성능 열화를 감수하면 큰 복잡도 감소를 이룰수 있음을 전산 실험 결과를 통하여 확인할 수 있다. 추후 채널 코딩과 결합할때 이러한 알고리즘들을 사용하여 얻어진 연관정 정보에 대한 성능을 분석하여 신뢰성과 복잡도사이의 Trade-Off 특성에 관한 연구가 필요하다.

#### ACKNOWLEDGMENT

이 연구는 한국 학술 진흥재단 (MOEHRD, KRF-2008-314-D00287)과 서울시 산학연 협력사업 (JP091007)의 지원 아래 이루어졌습니다.

#### 참고 문헌

- [1] U. Fincke and M. Pohst, "Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis," *Math. Comput.*, vol.44, no. 5, pp. 463-471, May 1985.
- [2] B. M. Hochwald and S. ten Brink, "Achieving near-capacity on a multiple-antenna channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, No. 3, pp. 389-399, March 2003.
- [3] E. Agrell, T. Eriksson, A. Vardy, and K. Zeger, "Closest point search in lattices," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 48, no. 8, pp. 2201 - 2214, Aug. 2002.
- [4] C. P. Schnorr and M. Euchner, "Lattice basis reduction: Improved practical algorithms and solving subset sum problems," *Math. Programming*, vol.66, no. 2, pp. 181-191, Sep. 1994.