복호 후 전달 릴레이 시스템에 대한 정확한 평균 오류율 분석

장진영*, 고균병*
충주대학교 제어계측공학과

Exact Average BER Analysis for Decoded-and-Forward Relay Systems

Jean-Yeong Jang* and Kyun-Byoung Ko*
*Dept of Control Instrumentation Engineering, ChungJu National University
e-mail : rasd0987@naver.com, kbko@cjnu.ac.kr*

요 약

본 논문에서는 송신국과 릴레이에서의 오류확률을 고려한 복호 후 전달 릴레이(DF: Decoded and Forward) 시스템에 대하여 정확한 비트 오류율 분석을 수행하고자 한다. 성능 분석에서는 복호 후 전달 릴레이 시스템의 노드들 간의 채널을 상호 독립적인 레일리 페이딩 채널로 가정하고 변조 방식으로는 BPSK(Binary Phase Shift Keying)를 사용한다.

우선, 정확한 평균 오류율 분석을 위하여 송신국-수신국 링크와 릴레이-수신국 링크 결합시 릴레이 노드의 복호결과 오류 유무에 따라 수신 SNR(Signal to Noise Ratio)을 각각 유도하고 복호결과가 오류일 때 수신 SNR이 양수인 경우와 음수인 경우를 고려하여 그에 대한 PDF(Probability Density Function)를 계산한다. 그리고 각각의 경우에 대한 평균 오류율을 유도하였다. 또한 모의실험 결과와의 비교를 통하여 제안된 성능 분석 기법의 정확성을 검증하였다.

1. 서론

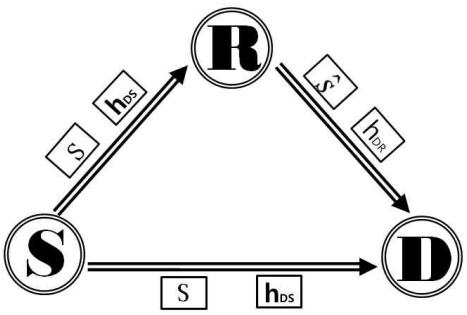
페이딩의 영향을 극복하고자 하는 것은 이동 통신 시스템에서 항상 중요한 과제이며, 그 중에서 다이버시티를 사용하는 것이 효율적으로 페이딩 채널을 극복하는 무선 통신 방법으로 널리 사용되고 있다. 여러 가지 다이버시티 기법 중에서 공간 다이버시티를 이용하는 다중 안테나 전송 기법 MIMO(Multiple Input Multiple Output) 기술이 최근 이동 통신 연구의 중요한 연구 분야였다[1].

하지만, 현실적으로 단말기에 많은 안테나를 설치하는 것은 공간적인 측면이나 복잡도 측면에서 제약이 생기므로 MIMO 기술을 이용하지 않고도 공간 다이버시티 효과를 얻기 위한 방법으로 Source와 Destination 사이에 Relay를 사용하는 협력 통신이 제안 되었다. 이러한 협력 통신은 증폭 후 전송(AF: Amplify and Forward)과 복호 후 전송(DF: Decoded and Forward)의 두 가지 프로토콜로 크게 분류 할 수 있다. AF 프로토콜은 Relay가 Source로부터 수신한 신호를 증폭하여 재전송하는 방식으로 복잡도가 작지만 노이즈가 증폭 되는 단점이 있고 DF는 Relay가 Source로부터 수신한 신호를 복호 후 재생성하여 전송하는 방식으로 복잡도가 크지만 Relay가 복호에 성공한 경우에는 AF에 비하여 향상된 성능을 나타낸다[1-5].

최근에는 Relay가 Cyclic Redundancy Check (CRC) Relay 단에 수신된 신호의 오류를 확인하여 오류가 없을 때에만 신호를 전송하고 그렇지 않은 경우는 Source에 재전송을 요구하는 Relay에 관한 연구들이 진행 되었다[6].

본 논문에서는 기존 논문에서 진행 되지 않은 Source와 Relay 단에서 오류가 발생 했을 때의 성능을 분석하여 S-D 링크와 S-R-D 링크의 결합된 성능을 Proabability Density Function(PDF) Approach를 사용하여 분석하고 그 결과를 시뮬레이션 결과와 비교하여 유도된 식을 검증한다.

2. DF Relay 시스템 모델



[그림 1] DF Relay 시스템 블록도

[그림 1]은 DF 프로토콜을 사용하는 Relay의 시스템 블록도를 나타낸다. 첫 번째 시간 슬롯에서 Ⓢ(Source)는 Ⓡ(Relay)와 Ⓓ(Destination)으로 전송 신호를 전송하고 두 번째 시간 슬롯에서는 Relay가 조건 없이 Source로부터 수신한 신호를 항상 복호 후 재생성하여 Destination으로 전송한다. Destination에서는 최종적으로 S-D 링크와 S-R-D 링크의 수신 신호를 결합한다.

첫 번째 시간 슬롯에서 Source는 Relay와 Destination으로 BPSK(Binary Phase Shift Keying) 심벌(s)를 전송하는데 Destination과 Relay에서 수신한 신호는 아래와 같다.

$$y_{DS} = h_{DS}\, s + n_{DS} \tag{1}$$

$$y_{RS} = h_{RS}\, s + n_{RS} \tag{2}$$

상기 식에서 h_{DS}와 h_{RS}은 S-D 링크와 S-R링크의 Rayleigh fading channel 이득이다. 또한 n_{DS} 및 n_{RS}은 각 링크에서의 AWGN으로 그 분산은 모두 σ^2으로 가정한다.

두 번째 시간 슬롯에서는 Relay에서 전송받은 심벌(s)를 복호화하고 심벌을 재생성하여($\hat{s}$)를 Destination로 전송한다. 두 번째 시간 슬롯에서 Destination이 수신한 신호는 아래와 같다.

$$y_{DR} = h_{DR}\, \hat{s} + n_{DR} \tag{3}$$

h_{DR}은 R-D링크의 Rayleigh fading channel 이득이고 n_{DR}은 AWGN으로 그 분산은 σ^2이다.

S-D, S-R 및 R-D 링크에 순시적인 수신 SNR은 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\gamma_0 = |h_{RS}|^2/\sigma^2 \tag{4-1}$$

$$\gamma_1 = |h_{DS}|^2/\sigma^2 \tag{4-2}$$

$$\gamma_2 = |h_{DR}|^2/\sigma^2 \tag{4-3}$$

본 논문에서는 Relay 노드의 위치에 따른 성능 비교를 위하여 다음을 가정하도록 한다. 편의상 Relay 노드가 Source와 Destination사이에 존재할 경우를 고려한다. 이때 Source와 Relay사이의 거리 α를 Source와 Destination사이의 거래에 대한 상대적인 거리로 정의하면 $0 \le \alpha \le 1$의 값을 갖는다. 그리고 Relay 위치에 따른 경로 손실은 거리 α의 μ차승에 비례한다. 따라서 S-D 링크의 평균 SNR을 $\overline{\gamma_1} = E\left[|h_{DS}|^2\right]/\sigma^2$로 정의할 때, S-R 링크 평균 SNR은 $\overline{\gamma_0} = \overline{\gamma_1}/\alpha^{\mu}$이고 R-D 링크의 평균 SNR은 $\overline{\gamma_2} = \overline{\gamma_1}/(1-\alpha)^{\mu}$로 표현할 수 있다.

3. DF Relay의 성능 분석

본 절에서는 Relay 단에서의 오류가 S-D 링크와 S-R-D 링크의 결합된 성능에 미치는 영향을 분석하고자한다. 이를 위하여 우선 S-R-D 링크의 평균 오류율을 분석한다.

3.1 S-R-D 링크의 Averaged BER

Relay 단의 전송심벌에 대한 추정과정에서 잘못된 결정을 내릴 조건부 확률은 $P_b(\gamma_0)$이고 정확한 결정을 내릴 조건부 확률은 $1-P_b(\gamma_0)$이다. 또한 전송심벌을 정확히 추정하여 재전송한 경우 Destination이 잘못된 결정을 내릴 조건부 확률은 $P_b(\gamma_2)$이고 정확한 결정을 내릴 조건부 확률은 $1-P_b(\gamma_2)$이다. 여기서 $P_b(\gamma_i) = Q\left(\sqrt{2\gamma_i}\right) = \int_{\sqrt{2\gamma_i}}^{\infty} 1/\sqrt{2\pi}\, exp(-y^2/2)dy$이다. $P_b(\gamma_0)$와 $P_b(\gamma_2)$는 S-R 링크 및 R-D 링크의 조건부 오류율을 의미한다.

결과적으로 S-R-D 링크의 조건부 오류율은 아래와 같이 표현된다[5].

$$\begin{aligned} &P_b(\gamma_0, \gamma_2) \\ &= P_b(\gamma_0)(1-P_b(\gamma_2)) + (1-P_b(\gamma_0))P_b(\gamma_2) \\ &= P_b(\gamma_0) + P_b(\gamma_2) - 2P_b(\gamma_0)P_b(\gamma_2) \end{aligned} \tag{5}$$

또한 S-R-D 링크의 평균 오류율은 아래와 같다.

$$P_b(\overline{\gamma_0}, \overline{\gamma_2}) = P_b(\overline{\gamma_0}) + P_b(\overline{\gamma_2}) - 2P_b(\overline{\gamma_0})P_b(\overline{\gamma_2}) \tag{6}$$

S-D, S-R 및 R-D 링크의 평균 오류율 $P_b(\overline{\gamma_i})$은 다음 식으로 유도된다[7].

$$\begin{aligned} P_b(\overline{\gamma_i}) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\overline{\gamma_i}} e^{-\gamma_i/\overline{\gamma_i}} Q(\sqrt{2\gamma_i})\, d\gamma_i \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{\overline{\gamma_i}}{1+\overline{\gamma_i}}}\right] \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $\overline{\gamma_i} = E[\gamma_i]$이고 $P_b(\overline{\gamma_1})$는 S-D 링크의 평균 오류율을 의미한다.

3.1 Relay 링크의 Error Event를 고려한 평균 오류율 분석

Destination에서 S-D 링크와 S-R-D 링크의 결합된 신호에 대해 MRC를 가정하면, Relay에서의 Error Event에 따라 전체 수신 SNR을 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\gamma_T = \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2, & \hat{s} = s \\ \gamma_1 - \gamma_2, & \hat{s} = -s \end{cases} \tag{8}$$

여기서 $\hat{s} = s$일때의 확률은 $P_b(\overline{\gamma_0})$, $\hat{s} = -s$의 확률은 $1 - P_b(\overline{\gamma_0})$이다. 여기에서, Relay의 Error Event를 Relay가 Correctly Detection(CD)한 경우와 Erroneous Detection(ED)한 경우로 분류 하고 각각의 경우에 대한 오류율을 분석하도록 한다.

3.2.1 Realy의 Correctly Detection(CD) 경우

Relay가 정확하게 결정을 한 경우에 대한 조건부 오류율은 아래와 같이 표현된다.

$$P_b^{CD}(\gamma_T) = P_b^{CD}(\gamma_1, \gamma_2) = P_b(\gamma_1 + \gamma_2) \tag{9}$$

또한 평균 오류율은 다음과 같다[7].

$$P_b^{CD}(\overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_2}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\pi_k\left[1 - \sqrt{\frac{\overline{\gamma_k}}{1+\overline{\gamma_k}}}\right] \tag{10}$$

여기서 $\pi_k = \prod_{i=1, i\neq k}^{2} \overline{\gamma_k}/(\overline{\gamma_k} - \overline{\gamma_i})$이다.

3.2.2 Relay의 Erroneous Detection(ED) 경우

Relay가 잘못된 결정을 내린 경우에 대한 조건부 오류율은 γ_T의 범위에 따라 아래와 같이 표현된다.

$$P_b^{ED}(\gamma_T) = P_b^{ED}(\gamma_1, \gamma_2) = \begin{cases} Q(\sqrt{\gamma_T}), & \gamma_T \geq 0 \\ 1 - Q(\sqrt{|\gamma_T|}), & \gamma_T < 0 \end{cases} \tag{11}$$

상기식을 이용하여 평균 오류율 분석을 하기 위하여 우선 γ_T의 PDF를 유도하도록 한다. 이를 위해 γ_1 및 $-\gamma_2$의 특성함수를 아래와 같이 유도한다[7].

$$E[e^{jw\gamma_1}] = \frac{1}{1 - w\overline{\gamma_1}}, \; E[e^{-jw\gamma_2}] = \frac{1}{1 + w\overline{\gamma_2}} \tag{12}$$

또한 두 랜덤변수가 독립적이기 때문에 특성 함수는 아래와 같이 특성 함수들의 곱으로 주어진다.

$$\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}(w) = \frac{1}{1 - w\overline{\gamma_1}}\frac{1}{1 + w\overline{\gamma_2}} \tag{13}$$

γ_T의 PDF는 상기 식을 역 푸리에 변환하여 구할 수 있다. 이를 위해 우선 상기 식을 다음으로 분해한다.

$$\Phi(w) = \left(\frac{\overline{\gamma_1}}{\overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_2}}\frac{1}{1 - \overline{\gamma_1}w}\right) + \left(\frac{\overline{\gamma_2}}{\overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_2}}\frac{1}{1 + \overline{\gamma_2}w}\right) \tag{14}$$

최종적으로 역 푸리에 변환을 통해 아래와 같이 γ_T의 PDF를 얻을 수 있다.

$$f(\gamma_T) = \begin{cases} \frac{1}{\overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_2}} e^{-\gamma_T/\overline{\gamma_1}}, & \text{for } \gamma_T \geq 0 \\ \frac{1}{\overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_2}} e^{\gamma_T/\overline{\gamma_2}}, & \text{else} \end{cases} \tag{15}$$

위식을 이용하여 평균 오류율을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_b^{ED}(\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_T) P_b^{ED}(\gamma_T) d\gamma_T \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\overline{\gamma_1}}{1 + \overline{\gamma_1}}}\right)\left(\frac{\overline{\gamma_1}}{\overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_2}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\overline{\gamma_2}}{1 + \overline{\gamma_2}}}\right)\left(\frac{\overline{\gamma_2}}{\overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_2}}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

따라서 최종적인 S-D링크와 S-R-D링크의 결합된 오류율은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} P_b(\overline{\gamma_0}, \overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}) &= (1 - P_b(\overline{\gamma_0}))P_b^{CD}(\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}) \\ &\quad + P_b(\overline{\gamma_0})P_b^{ED}(\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}) \end{aligned} \tag{17}$$

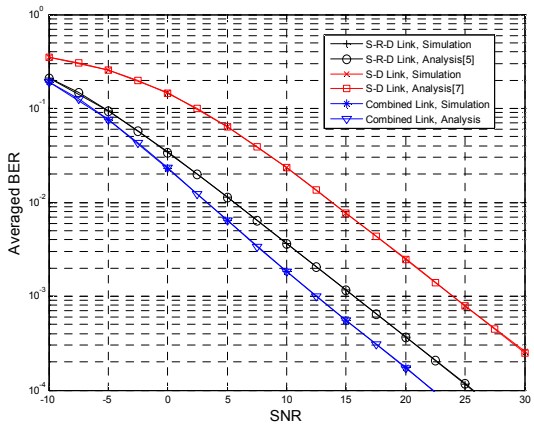
식 (16)에서 보이는 바와 같이 Relay가 ED일 경우 γ_T의 범위에 따라 식이 나누어짐을 알 수 있다. 식(10)과 (16)의 비교를 통하여 Relay단에서 잘못된 결정이 평균 오류율에 어떠한 영향을 미치는 지를 확인 할 수 있다. 즉, 식(10)은 평균 오류율이 0.5 보다 작은 항 두 개의 합으로 이루어져 있고 이는 각 링크의 결합에 따라 Diversity 이득이 존재함을 의미한다. 반면에 식(16)은 평균 오류율이 0.5보다 작은 항과 큰 항 두 개의 합으로 이루어져 있다. 즉, Relay단에서의 잘못된 결정은 0.5 보다 큰 항을 만들어 냄을 알 수 있고 이는 링크의 결합에 따른 Diversity 이득을 얻지 못함을 의미한다.

3. 모의실험 및 결론

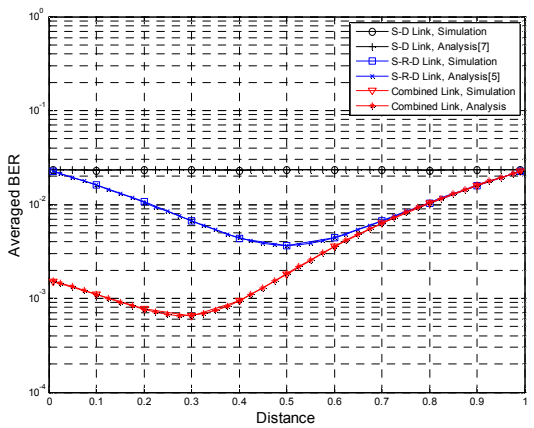
본 논문에서는 기존에 연구되지 않은 Relay 단에서의 오류가 S-D 링크 및 S-R-D 링크의 결합에 어떻게 영향을 미치는 지를 정확한 평균 오류율을 통하여 분석 하였다. 이를 위하여 DF Relay 시스템의 환경을 다음과 같이 정의한다.

[그림 2]는 SNR 변화에 따른 평균 오류율 성능을 S-D, S-R-D 및 Combined 링크에 대해 비교한다.

여기서 $\alpha = 0.5$ 및 $SNR = \overline{\gamma_1}$을 가정하였다. 즉, Relay는 Source와 Destination 중간에 위치한다. 여기서 Combined 링크는 S-D 링크와 S-R-D 링크의 결합 성능으로 성능 분석 결과는 논문에서 유도된 식(17)의 결과를 의미한다. [그림 3]은 Relay 위치에 따른 평균 오류율 성능을 비교하고 있다. 두 그림을 통하여 다음을 확인 할 수 있다. 즉, Relay 단의 오류 유무를 고려한 PDF 기반의 성능 분석 결과가 모의실험 결과와 모든 SNR 영역 및 Relay 위치에 대해 일치함을 알 수 있다. 또한 DF Relay 시스템에서 S-D 링크와 S-R-D 링크의 결합을 통하여 성능 향상을 얻을 수 있음을 확인할 수 있으며 DF Relay는 Source와 Destination중 Source 근처에 가까이 위치시킬 때 결합에 따른 성능 향상을 얻을 수 있음을 확인하였다[8].



[그림 2] SNR에 따른 평균 오류율 성능 비교 ($SNR = \overline{\gamma_1}$, $\alpha = 0.5$)



[그림 3] Relay 위치에 따른 평균 오류율 성능 비교 ($\overline{\gamma_1} = 10dB$)

참고문헌

[1] J. N. Laneman, D.N.C. tes and G. W. Wornell, "Cooperative diversity in wireless networks: efficient protocols and outage behavior," *IEEE Trans. Inform. Theory.,* Vol. 50, no. 12, pp. 3063-3080, Dec. 2004.

[2] Tairan Wang, Alfonso Cano, Georgios B. Giannakis, and J. Nicholas Laneman, "High-Performance Cooperative Demodulation With Decode-and-Forward Relays," *IEEE Trans. on Comm.,,* Vol. 55, no. 7, pp. 1427-1438, July. 2007.

[3] A. bletsas, H. Shin, M. Z. Win, and A. Lippman, "A simple cooperative diversity method based on network path selection," *IEEE J. of Selected Areas in Comm.,* Vol. 24, no. 3, pp. 659-672, Mar. 2006.

[4] Salama S. Ikki, and Mohamed H. Ahmed, "Performance Analysis of Adaptive Decode-and-Forward Cooperative Diversity Networks with Best-Relay Selection," *IEEE Trans. on Comm.,* Vol. 58, no. 1, pp. 68-72, Jan. 2010.

[5] M. O. Hasna and M.-S. Alouini, "End-to-End performance of transmission systems with relays over Rayleigh-fading channels," *IEEE Trans. Wireless Comm.,* Vol. 2, no. 6, pp. 1126-1131, Nov. 2003.

[6] A. Sendonaris, E. Erkips, and B. Aazhang, "User Cooperation Diversity Part II : Inplementation aspects and performance analysis," *IEEE Trans. on Inform. Theory,* Vol. 51, no. 12, pp. 1939-1948, Nov. 2003.

[7] John G. Proakis, *Dgital Communications.* New York: Gaw-Hill, 1995.

[8] John Boyer, David D, and Halim Yanikomeroglu, "Multihop Diversity in Wireless Relaying Channels," *IEEE Trans. on Comm,* Vol. 52, no. 10, pp. 1820-1830, Oct. 2004.