

QAM 변조방식과 결합된 비이진 LDPC 부호의 성능 비교

*권경훈, **임현호, ***허 준

*고려대학교, **고려대학교, ***고려대학교

*superstarkkh@korea.ac.kr, **limhh2@korea.ac.kr, ***junheo@korea.ac.kr

Performance Analysis of Non Binary LDPC Codes over GF(q)

*Kyung-hoon Kwon, **Hyunho Im, ***Jun Heo

Korea University

요약

1962년 Gallager에 의해서 처음 제안된 LDPC 부호는 터보부호(turbo codes)와 마찬가지로 Shannon의 채널용량 한계(channel capacity limit)에 가까운 성능을 보였지만 당시 기술력으로 구현이 불가능한 복잡도로 인해 오랫동안 잊혀져왔다. 1995년 Mackay 와 Neal은 이를 재발견하였고 간단한 확률적 복호법을 이용하여 LDPC 부호의 성능이 매우 우수함을 보였다. 또한 1997년 Mackay는 $q>2$ 일 때 LDPC 부호를 GF(q)상에서 구성할 경우에 성능이 더 좋아짐을 보였다. 본 논문에서는 이진 bit로 구성된 같은 길이의 정보 비트(information bit)를 통해 16-QAM 변조를 사용했을시 Binary LDPC 부호와 Non Binary LDPC 부호의 성능을 비교 분석하고, 최적의 성능을 가지는 LDPC 부호의 설계에 대해 제안한다.

1. 서론

최근 이동통신은 고속 데이터 전송과 이동성이 중요시 되고 있으며 이는 국제 표준에서도 고려되고 있다. IEEE 802.16e에서는 국제 휴대 인터넷 표준인 채널 부호로서 LDPC 부호를 채택하였으며, 이는 LDPC 부호가 다른 채널 부호에 비하여 고속 데이터 전송에 필요한 높은 코드율에서의 성능이 탁월하고, BP(Belief Propagation) 알고리즘을 사용한 복호 알고리즘 하드웨어 구현에 있어서 패러렐 프로세싱이 가능하다는 장점이 있기 때문이다.

이진 LDPC 부호는 GF(q), $q=2^l$ 에서 정의된다. 비이진 LDPC 부호는 GF(q)상의 벡터 공간(vector space)을 이용하며 이때 $q=2^l$ 를 의미한다. 기존의 논문들을 통해서 이진 LDPC 부호의 성능보다 비이진 LDPC 부호의 성능이 GF상에서 q 값이 커질수록 향상됨을 알 수 있다.[3][5] 또한 q 값이 증가함에 따라 쓰이는 H 행렬(parity check matrix)이 변수노드(variable node)의 디그리(degree)값이 2일 때, 최적의 성능을 보인다는 것을 알 수 있다.[7][8][9] 따라서 본 논문에서는 비이진 LDPC 부호의 디그리(degree)가 2인 H 행렬(parith check matrix)을 바탕으로 QAM 변조를 통한 전송기술에 있어서 최적의 LDPC 부호를 찾고자 한다. 2장에서는 비이진 LDPC 부호의 설계에 대해 다루고, 3장에서는 비이진 LDPC 부호의 복호(decoding)과정에 대해 살펴본다. 4장에서는 QAM 변조를 통한 정보를 이진 LDPC 부호와 비이진 LDPC 부호와의 성능 비교 분석을 통하여 5장에서 결론을

맺도록 한다.

2. 비이진 LDPC 부호의 설계

GF(q)상에서 정의된 비이진 LDPC 부호는 기존의 이진 LDPC 부호의 일반화된 형태로 표현이 가능하다. 이때 q 는

$$q = 2^b \quad (1)$$

의 구조로 이루어진다. 비이진 LDPC 부호의 parity check matrix H는 '0'이 아닌 원소의 분포가 극히 적은(ultra sparse)형태로 구성되어진다. 메시지의 길이는 K로 정의하며, N은 부호어(codeword)의 길이로 정의한다. 따라서 부호율(code rate) R에 대해서 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$R = \frac{N-M}{N}, \quad M = N - K \quad (2)$$

이에 따라 ultra sparse 한 $[M \times N]$ 의 parity check matrix H는 열 무게(column weight)가 j, 행 무게(row weight)가 k인 LDPC 부호를 완성할 수 있다. 열 무게 j와 행 무게 k를 일정한 분포로 가지는 LDPC 부호를 (j,k) 정규 LDPC 부호라 하며, 비이진 LDPC 부호는 이러한 LDPC 부호의 H 행렬에서 각각의 열 무게(column weight)와 행 무게(row weight) 만큼의 유한 필드(finite field) GF(q), $q>2, (0, \dots, q-1)$ 의 원소로부터 채워진다. 입력신호들은 이진 bit들로 이루어진 메시지어를 Generator matrix를 통해 GF(q)상의 원소로 이루어진 부호어(codeword)로 만들어진다. 이를 행렬식으로 나타내면

본 연구는 지식경제부, 방송통신위원회 및 한국산업기술평가 관리원의 산업원천기술개발사업(정보통신)의 일환으로 수행하였음 [KI002058], 차세대 지상파 3D HDTV를 위한 고효율 전송기술 개발]

$$\mathbf{c} = \mathbf{G}^T \mathbf{b} \quad (3)$$

이식은 다시 다음으로 바꿀 수 있다.

$$\mathbf{c} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (\mathbf{s} \doteq) \mathbf{H}\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_N), \quad c_n \in GF(q)$$

parity check matrix \mathbf{H} 를 가우시안 소거법을 이용해 Generator matrix \mathbf{G} 를 구할 수 있다.

3. 비이진 LDPC 부호의 복호(Decoding)

비이진 LDPC 부호의 복호는 오증 벡터(syndrome vector) $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ 를 만족하는 가장 확률이 큰 벡터 \mathbf{c} 를 찾는 것이다. 이때 \mathbf{c} 의 likelihood는 채널 모델에 따른 것이다. 비이진 LDPC 부호의 복호는 [3]와 [5]에서 처음 제안되었다. 본 논문에서는 [3]와 [5]에서 제안된 BP 알고리즘을 negative log domain 상에서 복호를 수행함으로써 기존의 BP 알고리즘이 가지는 복잡도 보다 더 낮은 복잡도를 가지는 비이진 LDPC 부호를 가지게 된다. [4]

$N(m) = [n: H_{mn} \neq 0]$ 을 체크노드(check node) m 에 관여하는 노이즈 심볼(Noise symbols)의 set으로 정의하고, $M(n) = [m: H_{mn} \neq 0]$ 을 노이즈 심볼(Noise symbols) n 에 연계된 체크노드(check node)의 set으로 정의한다. 또 parity check matrix \mathbf{H}_{mn} 에서 $a \in GF(q)$ 상에서의 각각의 확률정보들을 q_{mn}^a, r_{mn}^a 으로 정의하고 의미는 다음과 같다.

Notation

λ_n^a : 변수노드 n 에 속해있는 심볼 a 에 해당하는 사전 정보(A priori information)

$\hat{\lambda}_n$: 변수노드 n 에 속해있는 사후 정보(A posteriori information)

q_{mn}^a : 체크노드 m 으로부터 변수노드 n 에 대하여 심볼 a 에 해당하는 메시지

r_{mn}^a : 변수노드 n 으로부터 체크노드 m 에 대하여 심볼 a 에 해당하는 메시지

본 논문에서는 기존의 확률 정보가 negative log domain 상에서 이루어지기 때문에 후반부에서 다루지는 \min^* operation에 대해서도 정의를 한다.

$$\min^*(x_1, x_2) = -\ln(e^{-x_1} + e^{-x_2}) \quad (5)$$

min star operation은 항이 늘어나도 성립한다.

$$\min^*(x_1, x_2, x_3) = \min^*(\min^*(x_1, x_2), x_3) \quad (6)$$

따라서 위 식을 전개해 보면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\min^*(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2) - \ln(1 + e^{-|x_1 - x_2|}) \quad (7)$$

비이진 LDPC 부호의 BP(Belief Propagation) 알고리즘은 크게 네 가지 step으로 나눌 수 있다.

1) Initialization step : 각각의 변수 노드(variable node)에서는 channel을 통과한 수신된 신호의 확률 정보들로 초기화 시켜준다.

$$\text{A priori information} : \lambda_n^a = -\ln(\text{Pr}(c_n = a | \text{channel})) \quad (8)$$

$$\text{변수 노드 메시지} : q_{mn}^a = \lambda_n^a \quad (9)$$

2) Tentative decoding(A posteriori information) : n 번째 변수노드(variable node)에 대해서 계산하는 과정이다. n 번째 변수노드와 연결된 모든 체크노드의 메시지와 채널로부터 전송된 정보를 가지고 가장 근접한 부호어 \hat{c}_n (n 번째 변수노드의 값)을 계산한다. 만약 모든 부호어가 체크섬 연산(check sum operation ($\mathbf{H}\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$))을 만족하게 되면 복호 알고리즘을 중단한다.

$$\hat{\lambda}_n = \lambda_n^a + \sum_{j \in M(n)} r_{jn}^a \quad (10)$$

3) Horizontal step : n 번째 변수노드의 메시지가 m 번째 체크노드로 메시지가 전달되는 과정이다. n 번째 변수노드에서는 인접한 모든 체크노드 중에서 m 번째 체크노드를 제외한 노드들로부터 정보를 업데이트 받는다. 업데이트 받은 정보와 초기값과의 합으로 다시 체크노드로 전달되는 확률 정보가 만들어진다.

$$q_{mn}^a = \lambda_n^a + \sum_{j \in M(n) \setminus m} r_{jn}^a \quad (11)$$

4) Vertical step : 각각의 체크노드의 메시지가 인접한 n 번째 변수노드로 메시지가 전달되는 과정이다. 체크노드에서는 인접한 변수노드 중에서 n 번째 노드를 제외한 노드들로부터 정보를 업데이트 받는다. 업데이트 받은 정보를 이용하여 \min^* operation이 이루어지고 다시 n 번째 변수노드로 정보를 전달하게 된다. 과정이 끝난 후 2)번 과정으로 넘어간다.

$$r_{mn}^a = \min^*\left(\sum_{j \in N(m) \setminus n} q_{mj}^a\right) \quad (12)$$

4. 16-QAM 변조를 통한 이진 LDPC 부호와 비이진 LDPC 부호의 성능 분석

그림 (1)에서는 16-QAM 변조의 constellation을 나타내고 그림 (2)에서는 16-QAM 변조를 사용하여 이진 LDPC 부호와 비이진 LDPC 부호의 성능을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서 구해보았다. 본 시뮬레이션 실험에 사용된 LDPC 부호의 정보 블록의 크기는 이진 LDPC 부호는 1024비트로 고정하고 $GF(2^2)$ 과 $GF(2^4)$ 상의 비이진

LDPC 부호는 1040비트로 고정하였다. 또한 GF(2³)상의 비이진 LDPC 부호는 1020비트로 고정하였다. 채널은 AWGN을 가정하였으며 반복복호의 수는 40번으로 고정하였고, 전체 코드 rate는 1/2이다. 이진 LDPC 부호의 경우 (3,6) 정규 LDPC 부호의 parity check matrix를 사용하였고, 비이진 LDPC 부호의 경우 (2,4) 정규 LDPC 부호의 parity check matrix를 사용하였다.

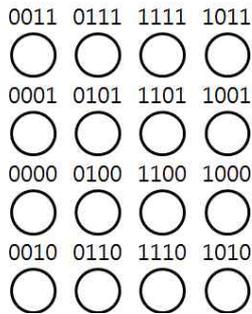


그림1. Gray mapping for 16QAM constellation.

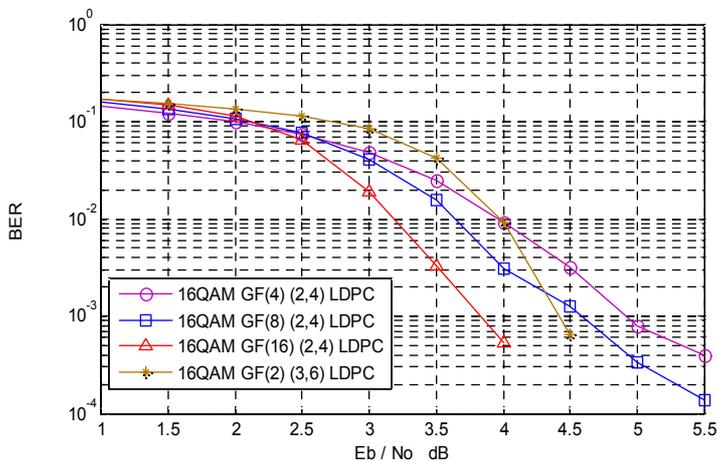


그림2. Simulation results of LDPC coded 16QAM

비이진 LDPC 부호를 사용한 것이 이진 LDPC 부호를 사용한 것에 비해 성능이 우수한 것을 시뮬레이션을 통해 확인 할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 비이진 LDPC 부호가 동일한 QAM 변조(modulation)를 사용하였을 때, 이진 LDPC 부호보다 더 좋은 성능을 가진다는 것을 보였다. 기존의 논문에서 다루는 BPSK 대신 QAM 변조를 하였을 때 비이진 LDPC 부호에 대한 성능 향상은 Bit Error Rate(BER)가 10⁻²인 영역에서 약 0.8 dB이며, 10⁻³인 영역에서는 약 0.6 dB의 성능 이득을 보인다. 또한 GF(4)와 GF(8)인 경우에 대해서도 GF(16)일 때 가장 좋은 성능을 가짐을 보였다.

참 고 문 헌

[1] John R. Barry, Low-density parity check codes, Tech. report,

Georgia Institute of Technology, 2001

- [2] D. J. C. MacKay and R. M. Neal, "Near Shannon limit performance of low-density parity-check codes", *Electron. Lett.*, vol. 32, pp. 1645 - 1646, 1996.
- [3] M.C. Davey and D.J.C MacKay. "Low density parity check codes over GF(q)". *IEEE Comm. Letters*, 2(6):pp.165-167, June 1998.
- [4] H. Wymeersch, H. Steendam, and M. Moeneclaey, "Log-domain decoding of LDPC codes over GF(q)" in *Proc. IEEE Intern. Conf. on Commun., Paris, France, June 2004*, pp.772-776
- [5] M. C. Davey, "Error-correction using Low-Density Parity-Check Codes," Univ. of Cambridge PhD dissertation, 1999.
- [6] V. S. Ganepola, R. A. Carrasco, I. J. Wassell, and S. Le Goff, "Performance study of non-binary LDPC Codes over GF(q)," in *Communication Systems, Networks and Digital Signal Processing, 2008. CNSDSP 2008. 6th International Symposium on*, 2008, pp. 585-589.
- [7] D. Declercq, M. Colas, and G. Gelle. Regular GF(2q)-LDPC modulations for higher order QAM-AWGN channels. In *International Symposium on Information Theory and its applications ISITA, Parma, Italia, 2004*.
- [8] A. Voicila, D. Declercq, F. Verdier, M. Fossorier and P. Urard, "Low-Complexity Decoding for non-binary LDPC Codes in High Order Fields", to appear in *IEEE Trans. Commun.*, 2009.
- [9] C. Poulliat, M. Fossorier, and D. Declercq, "Design of regular (2, dc) LDPC codes over GF(q) using their binary image," accepted for publication in *IEEE Trans. Commun.*, 2007.
- [10] W. Chen, C. Poulliat, D. Declercq, L. Conde-Canencia, A. Al-Ghouwayel and E. Boutillon, "Non-Binary LDPC Codes defined over the General Linear Group: Finite Length Design and Practical Implementation Issues", in the proc. of *VTC'09 (Special Session FP7-ICT-RAS-Cluster)*, Barcelona, Spain, April 2009.
- [11] Y. Zhang, D. Yuan, C. Li, "Performance Evaluation of LDPC codes with 16QAM in Nonlinear Channel", in *Proc. WCNM2005-Fall*, Sep. 2005.