

# 모형개선을 위한 감쇠행렬 추정법의 비교

## Comparison of Damping Matrix Estimation Methods for Model Updating

이건명† · 주영호\* · 박문수\*\*  
 Gun-Myung Lee, Young-Ho Ju and Mun-Soo Park

### 1. 서론

현재 동적 하중을 받는 기계시스템이나 토목공학 구조물의 응답을 예측하는 것은 이들의 설계, 생산, 유지에 필수적이 되었으며, 이 목적을 위하여 컴퓨터를 기반으로 한 해석 기술, 특히 유한요소해석 (FEA: Finite Element Analysis)이 널리 이용되고 있다. 그러나 이 방법을 사용하여 예측한 응답과 실제 실험으로 측정된 응답 사이에는 수학적 모형의 개발에 사용된 가정들로 인하여 차이가 있을 수 있다. 이 두 응답 사이의 차이를 줄이기 위하여 유한요소모형을 개선하는 방법에 관한 연구가 1990년대 부터 활발히 수행되어왔다.

저자들은 2 단계로 유한요소모형을 개선하는 방법을 제안하였다. 첫 단계에서 감쇠를 무시하고 최적화 기법을 이용하여 유한요소모형의 질량과 강성행렬을 개선한 다음, 두 번째 단계에서 질량행렬과 강성행렬을 고정하고, 감쇠행렬을 구한다. 본 논문에서는 위의 2 단계 유한요소모형 개선법의 두 번째 단계에서 감쇠행렬을 추정하기 위하여 사용할 수 있는 방법 세가지를 제안하고, 이 방법들의 특성을 고찰 및 비교하였다. 이 방법들은 비례감쇠인 계에 적용할 수 있는 방법 하나와 비례감쇠가 아닌 계에 적용할 수 있는 두 가지 방법이다. 이 방법들을 이산 4 자유도계의 시뮬레이션 데이터와 실제 외팔보로부터 측정된 데이터에 적용함으로써 이들의 가능성, 한계성, 유용성 등을 고찰하였다.

### 2. 감쇠행렬 추정법

#### 2.1 비례감쇠인 경우(방법 1)

비례감쇠 계에서는 모드의 직교성으로부터 다음 관계가 성립한다.

$$[X]^{-1}[C][X] = [C_{ii}] \quad (1)$$

위 식에서  $[C]_{N \times N}$ 는 감쇠행렬이고  $[X]_{N \times N}$ 는 모드 형으로 이루어진 모드행렬이며, 모형 개선 첫 단계에서 구한 질량행렬과 강성행렬로부터 고유치문제의 해로서 구해지므로 행과 열의 개수가 같다.  $N$ 은 계의 자유도를 의미한다.  $[C_{ii}]_{N \times N}$ 는 대각행렬이며  $i$  번째 요소가  $2\zeta_i\omega_{ni}$ 의 값을 갖는다. 그리고 측정 주파수 범위밖의 모드에 해당하는 대각선 요소는 영의 값을 갖는다.  $\zeta_i$ 와  $\omega_{ni}$ 는  $i$  번째 모드의 감쇠비와 고유진동수이고, 이 모드매개변수들은 측정된 FRF로부터 complex exponential 법 등의 모드매개변수 추출 방법을 사용하여 구할 수 있다. 식 (1)로부터 감쇠행렬  $[C]$ 는 일반적인 경우 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[C] = ([X][X]^T)^{-1}[X][C_{ii}][X]^T([X][X]^T)^{-1} \quad (2)$$

$[X]$ 의 행과 열의 개수가 같은 경우 위 식은 다음과 같이 간단해 진다.

$$[C] = ([X]^T)^{-1}[C_{ii}][X]^{-1} \quad (3)$$

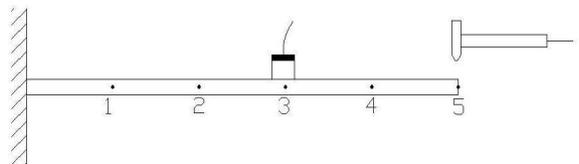


Fig. 1 Modal testing of a cantilever beam.

† 경상대학교 기계항공공학부, 공학연구원  
 E-mail : gmlee@gnu.ac.kr  
 Tel : (055) 751-5313, Fax : (055) 757-5622  
 \* 두산중공업  
 \*\* 한국폴리텍VII대학 진주캠퍼스

점성감쇠를 갖는 계의 FRF 행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[H] = ([K] - \omega^2[M] + i\omega[C])^{-1} \quad (4)$$

위 식에서  $[H]$ 는 FRF 행렬,  $[K]$ 와  $[M]$ 은 모형개선 첫 단계에서 구한 강성행렬과 질량행렬을 의미한다. 이렇게 구한 FRF 를 실험으로 측정한 FRF 와 비교함으로써 추정된 행렬의 정확도를 평가할 수 있다.

## 2.2 비례감쇠가 아닌 경우(방법 2)

비례감쇠가 아닌 계의 감쇠행렬을 추정하기 위하여 아래의 관계식을 이용한다.

$$[K] - \omega^2[M] + i\omega[C] = [H]^{-1} \quad (5)$$

즉 FRF 행렬의 역행렬인 임피던스 행렬의 허수부는 계의 감쇠행렬에 관한 정보를 포함하고 있으므로 이로부터 감쇠행렬을 추정할 수 있다. 위 식에서  $\omega$ 는 모든 주파수를 의미한다. 이 방법은 계의 감쇠행렬을 추정하는데 시도가 되었었다. 이 방법에서는 FRF 행렬의 역행렬을 구하기 위하여 FRF 행렬의 모든 요소를 측정하여야 한다.

## 2.3 비례감쇠가 아닌 경우(방법 3)

비례감쇠가 아닌 계에 적용할 수 있는 새로운 방법을 다음과 같이 제안하였다. 해석적으로 구한 FRF 행렬과 실험으로 측정한 FRF 행렬을 각각  $[H_a]$ ,  $[H_m]$ 라 하면 임피던스 행렬의 차는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[\Delta Z] = [H_m]^{-1} - [H_a]^{-1} \quad (6)$$

위 식 양변의 앞과 뒤에  $[H_a]$ 와  $[H_m]$ 를 각각 곱하면

$$[H_a][\Delta Z][H_m] = [H_a]([H_m]^{-1} - [H_a]^{-1})[H_m] = [H_a] - [H_m] \quad (7)$$

위 행렬의  $i$ 번째 열만 취하면

$$\{H_a\}_i - \{H_m\}_i = [H_a][\Delta Z]\{H_m\}_i = [H_a]([\Delta K] - \omega^2[\Delta M] + i\omega[\Delta C])\{H_m\}_i \quad (8)$$

모형개선 1 단계에서  $[K]$ 와  $[M]$ 이 정확하게 구하여졌다고 가정하면

$$[\Delta K] = [\Delta M] = 0$$

이므로 식 (8)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{H_a\}_i - \{H_m\}_i = [H_a](i\omega[\Delta C])\{H_m\}_i \quad (9)$$

양변의 앞에  $[H_a]^{-1}$ 을 곱하면 다음과 같이 된다.

$$[H_a]^{-1}(\{H_a\}_i - \{H_m\}_i) = (i\omega[\Delta C])\{H_m\}_i \quad (10)$$

위 식에서  $[H_a]$ 는 감쇠를 포함하지 않으면 다음과 같이 나타난다.

$$[H_a] = ([K] - \omega^2[M])^{-1} \quad (11)$$

따라서 식 (10)에서 미지수는 감쇠행렬의 수정량인  $[\Delta C]$  뿐이고, 여러  $\omega$  값에 대하여 이 식을 풀면  $[\Delta C]$ 를 구할 수 있다. 이 수정량에 감쇠행렬의 초기값을 더함으로써 감쇠행렬을 구한다

## 3. 결 론

유한요소모형의 개선은 2 단계로 나누어 첫 단계에서는 감쇠를 무시하고 계의 질량행렬과 강성행렬을 개선하고, 두 번째 단계에서는 첫 단계에서 구해진 질량, 강성행렬을 고정시키고 감쇠행렬을 구함으로써 이루어질 수 있다. 본 논문에서는 이러한 2 단계 모형 개선 과정의 두 번째 단계에 적용할 수 있는 감쇠행렬 추정 방법을 세 가지 제안하고, 그들의 특성을 비교하였다.

비례감쇠 계에 적용할 수 있는 방법 1은 모형 개선의 첫 단계에서 구한 질량과 강성행렬로부터 구한 모드행렬과, 계의 측정된 응답으로부터 추출한 모드 매개변수를 사용하여 감쇠행렬을 추정한다. 이 방법은 시뮬레이션 데이터와 실험 데이터에 적용하였을 때 정확한 감쇠행렬을 추정하였다. 비례감쇠가 아닌 계에도 적용할 수 있는 방법 2는 FRF 행렬의 역행렬로부터 감쇠행렬을 추정하는데 FRF 전체 행렬을 측정하더라도 추정된 감쇠행렬의 주파수에 대한 변화가 매우 커서 안정된 감쇠행렬을 추정할 수 없다. 역시 비례감쇠가 아닌 계에도 적용할 수 있는 방법 3은 임피던스 행렬의 차와 시스템 행렬의 차 사이의 관계식을 이용하여 감쇠행렬을 추정한다. 이 방법은 방법 2 보다는 정확한 추정 결과를 제공하지만 그 정확도가 만족스럽지 않다. 결론적으로 방법 1은 비례감쇠 계에만 적용할 수 있다는 제약이 있지만 세 가지 방법 중에서는 가장 정확한 추정 결과를 제공하고 있다.

제안된 감쇠행렬 추정 방법 중 가장 정확한 추정 결과를 주는 방법 1을 비례감쇠가 아닌 계에도 적용할 수 있도록 이 방법을 수정 또는 확장하는 연구를 향후 수행하고자 한다.

## 후 기

본 연구는 2 단계 BK21 사업의 지원으로 수행되었습니다.