한국소음진동공학회 2010년 추계학술대회논문집, pp.267~268

기하학적 비선형성을 고려한 전개하는 보의 동특성 해석

Dynamic Analysis of a Deploying Beam considering Geometric Non-Linearity

박성필* · 정진태†

Sungpil Park and Jintai Chung

1. 서 론

시간에 따라 길이가 변하는 기계구조 시스템은 산업용 로봇팔, 취출 로봇, 안테나 구조물 등의 실용적인 분야에 응용된다. 축방향으로 이동하면서 길이가 변하는 보에 대한 모델은 Tabarrok 등에 의해 제안되었으며 이에 대한 연구가 수행되었다. 일반적으로 보에 대한 거동 특성은 횡방향의 변형에 의한 거동이 지배적이지만 전개하는 보의 경우, 보가 가속도를 가지고 빠른 속도로 전개하며, 이 경우 횡진동 뿐만 아니라 축방향 진동의 영향도 무시할 수 없다. 따라서 본 논문에서는 기하학적 비선형성에 의한 축방향 거동과 횡방향 거동의 연성효과를 고려한 전개하는 외팔보의 동적 특성에 대한 연구를 수행하였다.

2. 전개하는 보의 모델링

그림 1 은 고정된 벽면으로부터 축방향으로 전개하는 외팔보를 보여주고 있다. 외팔보는 오일러-베르누이 보로서 가정하였으며 보의 내부에서 발생하는 전단효과와 회전효과를 무시한다. 또한 균일탄성보로서 가정하여 영의 계수 E, 단위체적당 밀도 ρ 그리고 단면적 A 는 일정한 값을 가지게 된다. 임의의 시간 t 에서 외팔보는 전개 속도 $V(t)$를 가지며 이 때, 보의 길이는 $L(t)$를 가진다. 보는 중력에 의한 하중을 받으며 그림 1 에서는 분포하중 $p(x, t)$로서 나타내었다. 이는 ρAg 로 표현된다. 또한 보의 왼쪽면을 통해 축방향으로 비보존력 F 가 작용한다. 이 힘은 보가 가지는 선형운동량의 시간에 대한 변화율로서 나타내어질 수 있으며 다음과 같이 나타낸다.

$$F = \rho A\dot{L}(t) + \rho AL(t)\ddot{L}(t) \tag{1}$$

여기서 $\dot{L}(t)$ 는 보의 전개속도로서 $V(t)$ 와 같으며, $\ddot{L}(t)$ 는 보가 전개하는 가속도로서 전개속도의 시간변화율과 같다.

전개하는 외팔보 중심축 위의 점 P 는 탄성변형에 의해 P`로 움직이게 된다. 점 P 는 축방향과 횡방향 변형을 가지며 이를 각각 u 와 v 로 나타내며 다음과 같이 나타낸다.

$$u=u(x, t), \qquad v=v(x, t) \tag{2}$$

변형 전의 점 P 의 위치좌표를 x 라 할 때, 변형 후의 점 P`의 위치벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{r}=(x+u)\mathbf{i}+v\mathbf{j} \tag{3}$$

여기서 $\mathbf{i}$ 와 $\mathbf{j}$ 는 각각 축방향 단위벡터와 횡방향 단위벡터를 의미한다. 위치벡터를 이용하여 점 P` 의 속도벡터를 구할 수 있다. 전개하는 보의 속도를 구하기 위해서는 물질미분이 이용되며, 이를 통해 얻어진 속도벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{v} = \left(V + \frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + V\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{j} \tag{4}$$

여기서 V 는 외팔보의 전개속도이며 위치좌표 x 의 시간변화율과 같다.

한편, 외팔보의 기하학적 비선형성을 고려하기 위하여 von Karman 의 비선형 변형률 이론이 적용되었다. 비선형 변형률을 적용한 보의 변위-변형률 관계와 변형률-응력 관계를 나타내면 다음과 같다.

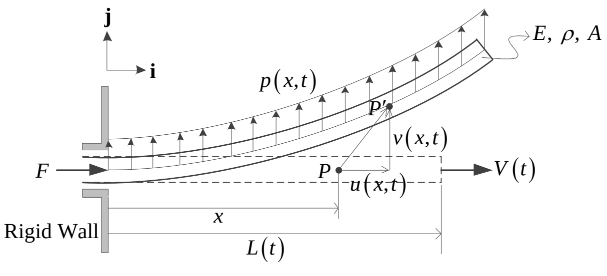

그림 1. 축방향으로 전개하는 보의 모델링

† 교신저자; 한양대학교 기계공학과
E-mail : jchung@hanyang.ac.kr
Tel : (031)400-5287, Fax : (031) 406-6964
* 한양대학교 일반대학원 기계공학과

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2, \quad \sigma_x = E\varepsilon_x \tag{5}$$

여기서 ε_x는 축방형 변형률을, σ_x는 축방향 응력을 나타낸다. 또한 u_x와 v_y는 임의의 점에서의 축방향 및 횡방향 변형량을 의미하며 이를 보의 중심축 상의 변형량 u와 v로서 나타내면 다음과 같다.

$$u_x(x,y,t) = u(x,t) - y\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}, \quad v_y(x,y,t) = v(x,t) \tag{6}$$

여기서, y는 중심축에서 임의의 점까지의 길이를 좌표를 의미한다. 식 (6)을 식 (5)에 대입하여 변형률을 나타내면 다음과 같다.

$$\varepsilon_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \tag{7}$$

식 (7)은 보의 임의의 점이 가지는 변형률을 중심축상의 점이 가지는 변형량으로서 표현한 것이다.

3. 지배방정식 유도

전개하는 보의 운동방정식과 경계조건들은 확장된 해밀턴 원리를 이용하여 얻어진다. 경계면을 통해 질량의 수송이 있는 시스템에 대한 해밀톤 원리는 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_{nc} - \delta M)\,dt = 0 \tag{8}$$

여기에서 δ는 변분 연산자이며, T는 운동에너지, U는 변형에너지, W_{nc}는 비보존력에 의한 일 그리고 M은 운동량 수송에너지를 의미한다.

전개하는 보의 운동에너지와 변형에너지는 다음을 통해 얻을 수 있다.

$$\delta T = \int_A \int_0^{L(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}\, dx\, dA \tag{9}$$

$$\delta U = \int_A \int_0^{L(t)} \sigma_x \cdot \delta\varepsilon_x\, dx\, dA \tag{10}$$

식 (10)에서 σ_x는 선형화된 축방향 응력으로 고려하며 변형에너지의 피적분항은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\sigma_x^{Linear} \cdot \delta\varepsilon_x = E\left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \cdot \delta\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] \tag{11}$$

외팔보의 중력에 의한 하중은 비보존 분포하중으로 나타내었다. 따라서 전개하는 보에 작용하는 비보존력에 의한 일은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\delta W_{nc} = F\delta u\big|_{x=0} + \int_0^{L(t)} p(x,t)\,\delta v\, dx \tag{12}$$

또한 질량의 유입에 의한 운동량 수송에너지는 다음과 같다.

$$\delta M = \rho V \int_A \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}\Big|_{x=0}^{L(t)} dA \tag{13}$$

전개하는 보의 운동방정식은 식 (9), (10), (12) 그리고 (13)을 식 (8)에 대입함으로서 얻을 수 있다.

전개하는 보를 지배하는 비선형 운동방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\rho A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \dot{V}\frac{\partial u}{\partial x} + V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho A\dot{V} \tag{14}$$

$$\rho A\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \dot{V}\frac{\partial v}{\partial x} + V^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - EA\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = p(x,t) \tag{15}$$

또한 경계조건은 다음과 같다.

$$EA\frac{\partial u}{\partial x} = -F,\; v = 0,\; EI\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x=0 \tag{16}$$

$$EA\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\; EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,\; EI\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad \text{at } x=L(t) \tag{17}$$

여기서, A는 보의 단면적, I은 단면에 대한 면적관성모멘트를 의미하며 다음과 같다.

$$A = \int_A dA, \quad I = \int_A y^2 dA \tag{18}$$

4. 결 론

본 논문에서는 축방향으로 가속도를 가지며 전개하는 보의 운동방정식과 경계조건을 확장된 해밀턴방정식에 의해 유도하였다. 전개하는 보의 운동방정식 식 (14)와 (15)를 살펴볼 때, 만약 전개속도 $V(t)$가 없다면 이 방정식은 널리 알려진 외팔보의 지배방정식과 동일하다는 것을 알 수 있다. 또한 von-Karman 변형률의 비선형성에 의해 횡방향 운동방정식인 식 (18)이 축방향 거동과 횡방향 거동이 연성되는 것을 알 수 있다.

향후, 운동방정식을 이산화하고 시간적분법에 의해 전개하는 보의 동적 거동 특성에 대한 확인이 이루어 질 것이다.