

## 능동 진동 제어를 위한 구동기 및 센서의 위치결정법

### Determination of Location of Actuator and Sensor for Active Vibration Control

이해민† · 박영진\* · 박윤식\*\*

Haemin Lee, Youngjin Park and Youn-sik Park

#### 1. 서론

복잡한 구조물에서의 진동을 제어하기 위해서 최적 구동기와 센서의 최적 위치를 결정하는 것은 매우 중요하다. 우선 진동하는 시스템의 가제어성(controllability)와 가관측성(observability)을 고려해야 하고, 더 나아가서는 시스템의 가제어도(degree of controllability)와 가관측도(degree of observability) 또한 고려해야 한다.

가제어도는 Kalman 이 처음 언급한 이후, 여러 문헌에서 다루졌다. Hamdan 과 Nayfeh 는 모달 가제어도를 정의하기 위해 기존의 PBH test 를 확장하여 좌고유 벡터와 입력 행렬간의 방향의 일치 정도를 새로운 지표로 제안하였다. Viswanathan, Longman 와 Likins 는 infinite norm 이 1 을 넘지 않는 제어 입력을 이용하여 임의의 유한 시간 내에 상태 변수 값이 0 으로 되돌아 올 수 있는 초기 조건 값의 2-norm 중 최소값을 가제어도 지표로 제시하였다.

Müller 와 Weber 는 선형 시스템에 대하여 가제어성 그래미언을 이용한 스칼라 지표를 제안하였다. 그 지표들은 시스템을 초기 조건에서 유한한 시간 내에 0 으로 보내기 위해 필요한 최소한의 입력 에너지를 정의하였다. Roh 와 Park 역시 유사한 접근법을 제시하였고 이를 모달 가제어도(modal degree of controllability)라 정의하였다. Kang 과 Park 또한 유사한 접근방법으로 외란의 영향을 고려하여 가제어도를 정의하였고 이를 외란 억제 지표(degree of disturbance rejectability)이라 정의하였다. 가관측도 역시 쌍대성(duality)의 성질을 이용하여 유사하게 구해낼 수 있다.

본 논문에서는 구동기와 센서를 동시에 사용하는 시스템, 즉 센서의 정보를 이용하여 진동을 제어하는 시스템에 대해서는 가제어도와 가관측도를 동시에 고려하는 성능평가를 평가할 수 있는 지표를 제안한다. 그리고 제안된 지표를 이용한 구동기 및 센서의 위치를 결정하는 방법을 제안한다.

#### 2. 보상능력지표

##### 2.1 문제 정의

제안하는 보상능력지표는 식(1)과 같은 선형시스템에 대하여 정의된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + \theta(t) \end{aligned} \quad (1)$$

식(1)의 시스템은 제어 및 관측 가능(controllable & observable)하다고 가정한다. 이 때 외란과 잡음은 평균이 0 인 백색 잡음이고, 각각의 자기 상관 함수는 식(2)와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_w(\tau) &= E[w(t)w^T(t+\tau)] = \mathbf{S}_w\delta(\tau) \\ \mathbf{R}_\theta(\tau) &= E[\theta(t)\theta^T(t+\tau)] = \mathbf{S}_\theta\delta(\tau) \end{aligned} \quad (2)$$

이때 제안하는 보상능력 지표는 식(3)과 같이 시스템의 최소 입력 에너지를 고려하여 제시된다.

$$\text{Minimize } \rho = E \left[ \int_0^T u^T(t)u(t)dt \right], \quad (3)$$

$$\text{subject to } x(0) = x_0(\text{unknown}), \quad x(t_f) = 0.$$

목적 함수는 외란에 의해 가진 되고 있는 시스템의 상태 변수를 최종 시간  $t_f$  에서  $x(t_f) = 0$  이 되도록 하기 위해 필요한 입력 에너지로 선택하였다. 즉, 제안된 지표는 입력 에너지라는 절대적인 물리량을 가지기 때문에 쉽게 이해할 수 있고 정량적인 지표로 적합하다.

##### 2.2 해석적 해

앞서 정의한 문제에 대하여 해석적인 해를 구하기 위해서 입력 에너지의 해석적인 해를 구해보면 식(4)와 같다.

$$u(t) = -B^T \Phi^T(t_f, t) W_c^{-1}(t_f) \times \left( \hat{x}_0 + \int_0^{t_f} \Phi(t_f, s) Dw(s) ds \right) \quad (4)$$

여기서  $\hat{x}_0$  는 센서출력으로부터 추정된 초기조건으로 센서의 잡음의 영향을 포함하고 있다.  $\Phi(t, \tau)$  는 상태변환행렬,  $W_c$  는 가제어성 그래미언을 나타낸다. 식(4)의 제어입력의 크기의 기대 값을 구하여 보상능력지표를 구해보면 식(5)과 같이 표현된다.

† 교신저자; KAIST, 기계공학과

E-mail : haemin122@kaist.ac.kr

Tel : (042) 350-3076, Fax : (042) 350-8220

\* KAIST, 기계공학과

\*\* KAIST, 기계공학과

$$\rho(t_f) = \text{tr} \left\{ W_c^{-1}(t_f) \cdot (x_0 x_0^T + W_d(t_f) + W_o^{-1}(t_f) W_n(t_f) W_o^{-1}(t_f)) \right\} \quad (5)$$

식(5)에서  $W_o$ ,  $W_d$ ,  $W_n$ 은 각각 가관측성, 외란, 측정잡음 민감도 그래미언을 나타낸다. 식(5)에서 최종 시간이 무한대가 되면 식(6)과 같이 정상상태의 그래미언들로 표현될 수 있다.

$$\rho = \text{tr} \left\{ \bar{W}_c^{-1} \cdot (x_0 x_0^T + \bar{W}_d + \bar{W}_o^{-1} \bar{W}_n \bar{W}_o^{-1}) \right\} \quad (6)$$

여기서 각각의 그래미언들은 Lyapunov 방정식의 해를 구함으로써 쉽게 구할 수 있다.

### 2.3 성분분석

식(5)에서 제안된 지표는 3 개의 항으로 표현된다. 이들 각각의 물리적인 의미를 살펴 보면 다음과 같다.

우선 첫 번째 항은 Müller 와 Weber 가 제안한 가제어도(DOC) 지표와 같다. 그리고 두 번째 항은 Kang 과 Park 에 의해 제안된 외란 억제 지표와 같다. 즉 제안된 지표는 가제어도와 외란 억제 지표를 포함하고 있다.

마지막으로 세 번째 항은 다음과 같이 표현된다.

$$\rho(t_f) = \text{tr} \left\{ W_{oco}^{-1}(t_f) \cdot W_n(t_f) \right\} \quad (7)$$

여기서  $W_{oco}(t_f)$ 는 가제어성과 가관측성 그래미언들을 곱한 것이다. 식(7)는 시스템의 초기조건과 외란이 없을 경우에 남는 항으로, 출력잡음이 시스템의 제어입력에 미치는 영향으로 볼 수 있다. 이 항은 기존에 정의되지 않은 항으로 본 논문에서는 출력잡음 민감도 지표(degree of output noise sensitivity)로 정의한다.

정리해보면, 제안된 지표는 기존의 가제어도 지표와 외란 억제 지표를 동시에 고려하면서 새롭게 제안된 잡음 민감도 지표까지 포함한다. 즉, 시스템의 보상능력을 평가할 수 있는 모든 지표를 포함하며, 구동기와 센서간에 미치는 영향까지도 알 수 있다.

## 3. 수치 예제

### 3.1 문제 정의

제안된 지표의 검증을 위해 그림 1.의 예제에 적용해본다. 구동기와 센서의 위치를 바꿔가면서 지표를 구하고 그 값이 가장 작은 위치를 최적의 위치로 선정한다. 그림 1.에서  $m_2$ 에 초기조건과 외란이 존재한다.

### 3.2 결과

위치 별 지표 값을 구해본 결과는 표 1.과 같다.  $B_1, B_2, B_3$ 는 각각  $m_1, m_2, m_3$ 의 위치에 구동기가 위치할 때를 나타내고,  $C_1, C_2, C_3$ 는  $m_1, m_2, m_3$ 의 변위를 측정,  $C_4, C_5, C_6$ 은  $m_1, m_2, m_3$ 의 속도를 측

정한 경우를 나타낸다.

결과를 확인해보면  $B_2$ 의 구동기 위치( $m_2$ )와  $C_4$ 의 센서위치( $m_1$ 의 속도측정)에서 가장 최적의 성능을 나타냄을 확인할 수 있다. 이 결과는 외란과 초기조건이  $m_2$ 에 존재하고, 속도측정이 변위 측정보다 상태추정에 더 용이하며, 지면 가까운 질량의 속도 측정이 상태추정에 더 적합하다는 결과를 나타내주고 있어, 제안된 지표가 최적의 구동기 및 센서의 위치를 파악하는데 쓰일 수 있다는 것을 확인할 수 있다.

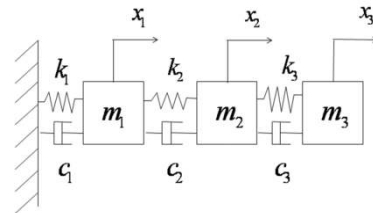


그림 1. 3DOF mass-spring-damper system

표 1. 구동기 및 센서 위치 별 제안된 지표의 값

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
$B_1$	44.0	42.2	119	22.7	24.6	46.7
$B_2$	36.6	51.8	78.12	19.1	32.1	31.6
$B_3$	123	87.8	343	50.9	41.3	117

## 4. 결론

본 연구에서는 센서의 정보를 이용하여 구동기를 제어하는 시스템에 대하여 보상능력을 평가하는 지표를 제안하였다. 제안된 지표는 시스템의 최종상태를 0으로 보내기 위한 최소 입력에너지라는 물리적인 의미를 지니고, Lyapunov 방정식의 해를 구함으로써 구할 수 있다.

제안된 지표는 기존의 가제어도 지표와 외란억제 지표를 포함하고 있고, 본 논문에서 새롭게 정의한 잡음 민감도 지표 또한 포함하고 있다. 따라서 제안된 지표 값이 작은 위치에 구동기와 센서의 위치를 결정하면 가장 최적의 배열을 구할 수 있고, 수치예제를 통하여 검증하였다.

## 후 기

본 연구는 두뇌 한국(BK) 21 프로젝트 일환으로 수행하였음.