흐름과 장파에 의해 발생하는 난류 및 수송모의를 위한 수심적분형 모형

Depth-Integrated Models for Turbulent Flow and Transport by Long Wave and Current

김대홍*, 패트릭 라이넷**
Dae-Hong Kim, Patrick Lynett

요 지

흐름과 장파에 의하여 발생되는 난류의 subgrid scale mixing effects를 고려할 수 있는 수심적분형 모형(depth-integrated model)을 제시하였다. 완전비선형의 수심적분형 모형은 약분산(weakly dispersive) 환경에서 흐름의 회전성(rotational)을 고려하도록 perturbation approach를 이용하여 유도되었다. 동일한 방법을 이용하여 수심적분형 이송확산방정식(depth-integrated scalar transport equation)을 유도하였다. 방정식은 4차정확도의 유한체적기법을 이용하여 해석하였으며, 다양한 혼합양상을 보이는 흐름에 대한 수치모의를 수행하였다.

핵심용어 : Boussinesq-type equations model, nonhydrostatic pressure, dispersion, inundation, flooding, finite volume method

1. 서론

자연에서 흐름은 3차원 현상이지만, 많은 경우에 수평의 흐름 구조가 연직방향의 흐름구조보다 크다. 이런 경우에는 수평 2차원의 흐름 구조가 전체 흐름에 지배적인 영향을 미치게 되고, 결과적으로 3차원의 흐름 특성을 적절히 포함 할 수 있다는 전제하에 수평 2차원의 수치모형은 매우 실용적이면서도 정확한 도구가 될 수 있다. 최근 들어 가장 많이 이용되고 있는 수평2차원 모형은 Boussinesq-tyoe equations 모형과 천수방정식모형 이다. 이 들은 perturbation approach 또는 수심 적분과정을 통하여 유도 할 수 있다. 이 중에서 Boussinesq-type 방정식 모형은 실제 자연에 존재하는 흐름의 분산성과 난류 및 rotation을 고려할 수 있다 (Kim et al., 2009). 이에 더하여 흐름과 파랑의 상호작용 또한 모의가 가능하며, 그 적용대상도 intermediate water depth까지 확장되었다. 그러나 수평이차원의 방정식을 유도하는 과정에서 dispersive stress (Kuiper and Vreugdnhill, 1973)와 삼차원의 난류특성과 같은 삼차원의 흐름 특성이 무시되었다. 결과적으로 흐름을 해석하기 위한 동수역학모형의 오차는 연계되는 이송확산모형의 오차로 전달되게 된다. 삼차원의 난류효과를 수평이차원 흐름모형에 고려하기 위하여 다양한 시도가 이루어졌다. 특히 Hinterberger et al. (2007)은 stochastic back scatter model을 이용하여 삼차원의 난류효과를 수평이차원 모형에 고려하였다. 흐름모형과 마찬가지로 이송화산 모형에 대하여도 흐름과 농도의 연직분포를 개략적으로 고려할 수 있는 모형의 개발이 필요하다.

* 정회원・서울시립대학교 공과대학 토목공학과 조교수・E-mail : dhkimhyd@uos.ac.kr
** Texas A&M University, Department of Civil Engineering, Associate Professor

2. 지배방정식

삼차원의 비압축성 유체에 대하여, 공간적으로 filtering 과정을 거친 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial \overline{u}_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \overline{u}_i^* \overline{u}_j^*}{\partial x_j^*} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p^*}}{\partial x_i^*} = \frac{\partial}{\partial x_j^*}\left(2\nu \overline{S_{ij}^*} - \tau_{ij}^*\right) \tag{2}$$

여기서 $i,j = 1,2,3$이고, 위 식들을 기본으로 하여 long wave scale을 이용하여 무차원화 하고 perturbation approach를 적용하여 2차항까지 식을 유도하면, 운동량 방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H\widetilde{\overline{u}_i}}{\partial t} + \frac{\partial H\widetilde{\overline{u}_i}\widetilde{\overline{u}_j}}{\partial x_j} + H\frac{\widetilde{\partial \overline{p}}}{\partial x_i} \\
&\quad = \alpha\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2H\nu_t^h\widetilde{\overline{S_{ij}}}\right) + \beta\mu^2 2\nu_t^v\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) + \beta\mu^2\tau_i^b + \gamma^2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(H\widetilde{\overline{u_i'u_j'}}\right) \\
&\quad + O\left(\mu^4, \alpha\mu^3, \beta\mu^4, \mu^2\gamma, \beta\mu\gamma\right) \qquad (12)
\end{aligned} \tag{3}$$

여기서 α, β와 μ는 scale parameter로써 그 크기는 1보다 매우 작다. ‘ ~ ’는 수심평균연산자를 의미한다. 식 (3)의 2번째 줄 마지막 항에 나타난 바와 같이, 공간적으로 분포하는 흐름의 난류특성을 고려할 수 있게 된다. 식의 차원을 회복시키면 최종적으로 수평이차원의 수심적분형 모형이 유도된다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial HU_i}{\partial x_i} + \mathcal{M} + \mathcal{M}^\nu = 0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial HU_i}{\partial t} + \frac{\partial HU_iU_j}{\partial x_j} + gH\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + H\left(D_i + \overline{\xi_i} + D_i^\nu + \overline{\xi_i^\nu}\right) + U_i\left(\mathcal{M} + \mathcal{M}^\nu\right) \\
&\quad - H\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\nu_t^h S_{ij}\right) + 2H\nu_t^v\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_j}\right) + \frac{\tau_i^b}{\rho} - HF_i = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

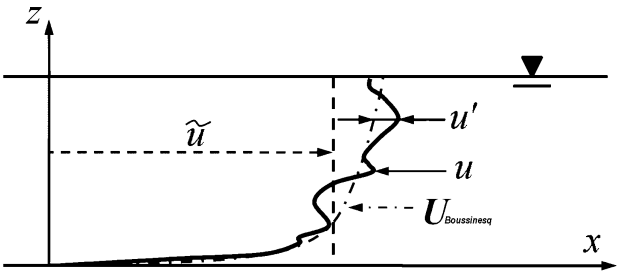

그림 1. 유속 정의 모식도

여기서, $i,j=1,2$이고, HF_i는 식 (3)의 dispersive stress를 나타내는 항으로 Hinterberger et al. (2007)에 제안한 stochastic backscatter 모형을 이용하여 구현하였다. 보다 자세한 각 항의 설명은 Kim and Kynett (submitted)에 수록되어 있다. 수심적분형 흐름 모형에 같은 방법을 이용하여, 수심적분형 이송확산 방정식을 다음과 같이 유도하였다.

$$\frac{\partial H\tilde{C}}{\partial t}+\frac{\partial H\widetilde{u_i}\tilde{C}}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(HD_{Lij}\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(HD_{xi}\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

여기서 D_{Lij}는 이송확산에 관한 dispersion coefficient이고 수심적분형모형에서 해석적으로 주어지는 유속분포를 기반으로 하여 유도되었다. D_{xij}는 수평방향의 확산계수로써, $D_{xij}=\nu/S_c+\nu^t/\sigma_t$로 주어진다. 여기서 S_c는 Schmidt number 이고, ν^h는 수평방향의 eddy viscosity이며, σ_t는 turbulent Schmidt number 이다.

3. 수치해석

유한체적법 (finite volume mothod)을 이용하여 방정식을 해석하였다. 구체적으로 이송항의 해석을 위해서는 4차정확도의 MUSCL TVD scheme을 이용하였다. 확산항의 해석을 위해서도 4차정확도와 2차정확도의 유한체적 기법을 이용하였다. 시간항에 대하여는 3차정확도의 Adams Bashforth predictor 기법과 4차정확도의 Adams Moulton corrector 기법을 이용하였다. 수심적분형 이송확산방정식을 해석하기 위하여, 흐름모형과 같은 수치해석 기법을 이용하였으며, 4차정확도의 유한체적법을 이용하여, 수치분산으로 인한 오차의 발생을 최대한 억제하였다.

4. 수치모의

4.1 수치모형 검증

수치모형의 검증을 위하여, 수치해와 해석해를 비교하였다. 해석대상은 그림 2에 보이는 바와 같은 평면의 중심을 기준으로, 일정한 각속도($0.134rad/hr$)로 회전하고 있고, 초기농도 C_o는 아래 식과 같이 주어진다.

$$C_o(x,y)=\exp\left\{-\frac{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{7}$$

여기서 $x_c=1250m$, $y_c=2500m$이다. 수치해석을 위하여 격자의 크기 $\Delta x=\Delta y=50m$를 이용하였고, 시간간격은 $\Delta t=40\text{sec}$를 이용하였다. 순수한 이송문제 해석을 위하여 $\sigma=220m$을 이용하였을 경우 그림 2에 보이는 바와 같이 해석해와 매우 잘 일치하였다. 이송확산에 대한 검증을 수행하기 위해, $\sigma=200m$, 확산계수 $D_x=D_y=0.1m^2/\text{sec}$를 이용하여 문제를 해석하였다. 그 결과 해석해와 매우 유사한 결과를 보였다.

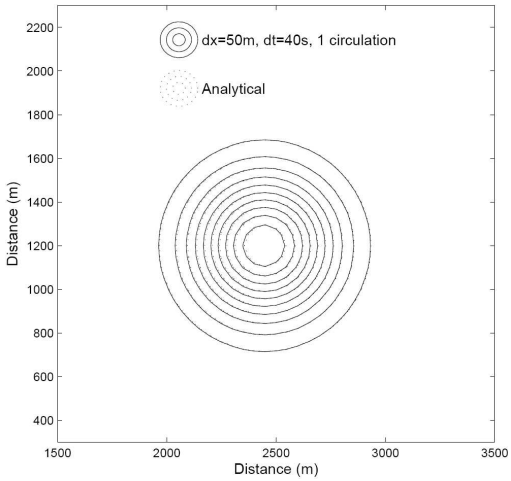

그림 2. 이송 수치모의 결과

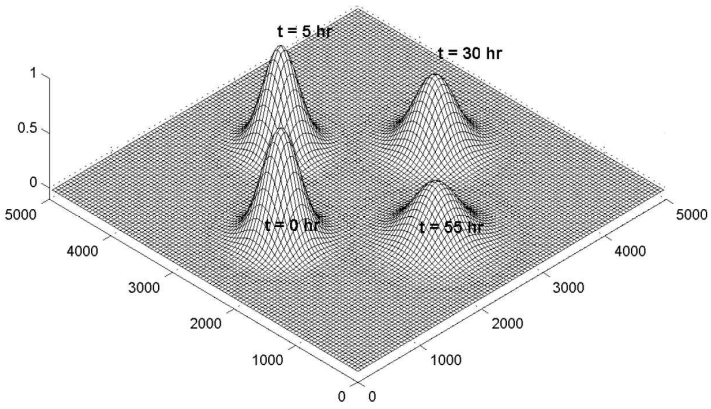

그림 3. 이송확산 수치모의 결과 (상대농도)

5. 결론

수심적분형 모형을 이용하여 다양한 혼합양상에 대한 수치모의를 수행하고 검증을 수행한 결과, 몇 가지 결론이 도출 되었다. 첫째, mixing layer 수치모의 결과 backscatter 모형을 이용하여 dispersive stress를 고려함으로써, energy transfer에 대한 물리적이 모의가 가능하였다. 둘째, 경험적 계수가 아닌 물리적 기반으로 한 확산 모의가 가능하였다. 세 번째, 식의 유도과정과 수치모의 결과로부터 평면이차원 모형의 한계가 확인 되었다. 마지막으로, 혼합의 원인이 기복이 심한 지형의 변화가 주원인일 경우에는, dispersive stress의 효과가 미미한 것으로 나타났다.

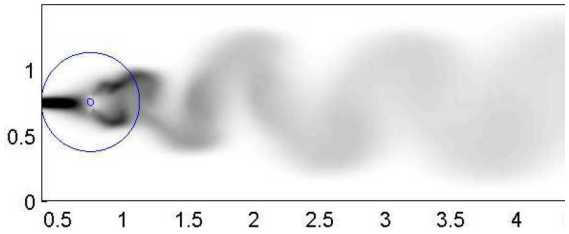

그림 4. 원추형 지형 주면의 혼합양상 모의 결과

참 고 문 헌

1. Hinterberger, C., Frohlich, J. and Rodi, W. (2007) 3D and Depth-Averaged Large-Eddy Simulations of Some Shallow Water Flows, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol.133, no.8, pp.857-872.
2. Kim, D.H., Lynett, P.J (submitted) Turbulent Mixing and Scalar Transport by Long Waves and Currents
3. Kim, D.H., Lynett, P.J., and Socolofsky, S. (2009). A Depth-Integrated Model for Weakly Dispersive, Turbulent, and Rotational Fluid Flows, Ocean Modelling, vol.27, pp.198-214.
4. Kuipers, J.and Vreugdenhill, C.B. (1973) Calculations of 2D horizontal flow, Delft Hydraulics. Lab. Report, S163, part 1.
5. Lloyd, P.M. and Stansby, P.K. (1997b) Shallow Water Flow around Model Conical Island of Small Slope. II: Submerged, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol.123, no.12, pp. 1068-1077.
6. Man, C. and Tsai, C.W. (2008) A higher-Order Predictor-Corrector Scheme for two-dimensional Advection-Diffusion Equation, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol.56, pp.401-418.