

# 지진해일 전파모의를 위한 유한차분모형 개발

## Development of Finite Difference Model for Tsunami Propagation

안성호\*, 하태민\*\*, 조용식\*\*\*  
Seong-Ho Ahn, Taemin Ha, Yong-Sik Cho

### 요 지

본 연구에서는 지진해일의 전파 과정을 모의함에 있어 선형 천수방정식의 수치분산을 이용하는 기법이 아닌 선형 Boussinesq 방정식을 직접 차분하는 유한차분기법을 제안하였다. 지배방정식과 차분식의 일치성을 해석하기 위해 이산화 오차를 확인하고, 수치해의 안정적 수렴여부를 판단하기 위해 Von Neumann 안정성 해석을 수행하였다. 또한 기법의 정확성을 검증하기 위하여 Gauss 분포의 초기 자유수면변위를 갖는 문제에 적용하여 선형 Boussinesq 방정식의 해석해와 비교하였다. 그 결과 기존의 선형 천수방정식을 차분화한 수치모형에 비하여 정확한 결과를 제공하였고 분산보정기법을 이용한 수치모형과 동일한 정확도를 보였으나 본 수치모형을 이용했을 때 비교적 넓은 범위의 조건에서 정확도 높은 결과를 제공하였다.

**핵심용어 :** 유한차분모형, 지진해일, Boussinesq 방정식, 분산효과

### 1. 서 론

지진해일은 장파로서 전파속도가 매우 빠르기 때문에 파형의 큰 변화 없이 매우 먼 거리를 전파할 수 있다. 지진해일이 먼 거리를 전파할 경우 분산효과는 중요한 역할을 한다(Kajiura 등, 1990). 특히 동해에서 발생하는 지진해일은 단주기파 성분이 강하고 파장에 비하여 먼 거리를 전파하기 때문에 분산효과가 매우 중요하다.

지진해일 해석 시 일반적으로 사용되어 오던 기존의 leap-frog 유한차분 모형(Imamura 등, 1988; 조용식, 1996)은 지배방정식으로 선형 천수방정식을 사용하고 파의 분산효과는 수치분산을 이용하여 고려하므로 정해진 시간 간격에 대해 수심에 따라 격자 간격을 적절히 선택해야 하는데 수심이 복잡하게 변하는 경우 격자간격 조정이 불가능하여 분산효과를 정도 높게 고려할 수 없다. 이 문제점을 해결하기 위하여 윤성범 등(2004)은 파동방정식의 인위적인 분산항을 이용하여 Boussinesq 방정식의 분산효과를 고려할 수 있는 수치기법을 제안하였다. 또한 Cho 등(2007)은 일정한 수심에서 수치적인 분산오차가 Boussinesq 방정식의 물리적인 분산항을 대체하도록 수심, 격자 간격 및 계산 시간 간격 사이의 관계식을 유도하고 Boussinesq 방정식의 분산항과 일치하는 수치분산을 이용하여 분산보정기법을 개발하였다.

기존의 지진해일 전파모의를 위한 모형은 복잡한 계산을 피하고 컴퓨터의 계산시간을 줄이기 위하여 선형 천수방정식을 지배방정식으로 사용하고 분산효과는 수치분산을 이용하였다. 하지만 현재

\* 정회원·한양대학교 건설환경공학과 석사과정 · E-mail : zczcz@hanyang.ac.kr  
\*\* 정회원·한양대학교 건설환경공학과 박사과정 · E-mail : kevin4324@hanyang.ac.kr  
\*\*\* 정회원·한양대학교 건설환경공학과 교수(교신저자) · E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr

컴퓨터의 계산 능력이 향상되어 선형 Boussinesq 방정식을 직접 차분하여 계산하는데 어려움이 없다. 따라서 본 연구에서는 지진해일 전파의 분산효과를 수치분산을 이용하는 기법이 아닌 선형 Boussinesq 방정식을 직접 차분하여 물리적 분산을 직접 해석하는 유한차분기법을 제안하여 정확한 분산효과를 고려하고 기존 연구의 수치분산에서 발생하는 오차를 줄이고 계산 효율을 개선하고자 한다. 제안한 기법의 이산화 오차를 확인하고 수치해의 안정적 수렴여부를 판단하기 위해 Von neumann 안정성 해석을 수행하였다. 또한 제안한 기법을 이용하여 Gauss 분포의 초기 자유수면변위에 대해 수치모의 한 결과와 선형 Boussinesq 방정식의 해석해(Carrier, 1991)를 비교하여 기법의 정확성을 검증하였다.

## 2. 지배방정식과 수치기법

동해에서 발생하는 지진해일의 파원은 약 30~40km로 그 규모가 작고 상대적으로 수심이 깊어 단주기파 성분이 강하게 나타나며, 약 900km의 먼 거리를 전파해오기 때문에 물리적 분산효과가 중요하다. 또한 수심이 매우 작은 인접 해역을 제외하면 대부분의 해역에서 수심에 비해 수면변위가 미소하여 비선형성을 무시할 수 있으므로 지진해일 전파 모의를 위한 지배방정식으로 약한 분산효과를 고려한 선형 Boussinesq 방정식을 사용하는 것이 바람직하다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \right] - \frac{h^3}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( \frac{P}{h} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left( \frac{Q}{h} \right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \right] - \frac{h^3}{6} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( \frac{P}{h} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left( \frac{Q}{h} \right) \right] \quad (3)$$

여기서  $\zeta$ 는 정수면으로부터의 수면변위( $m$ ),  $P$ ,  $Q$ 는 각각  $x$ -,  $y$ - 방향의 단위 폭 당 유량( $m^2/s$ ),  $g$ 는 중력가속도( $m/s^2$ ),  $h$ 는 정수심으로부터 바닥까지의 수심( $m$ )이다. 식 (2)와 (3)은 우변의 분산항에 대하여 장파 가정과 수심이 완만히 변한다는 가정하에  $P$ ,  $Q$ 를 소거하면 식 (4)~(5)와 같은 방정식으로 단순화 된다.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -g \frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -g \frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \quad (5)$$

본 연구에서는 leap-frog 유한차분 기법을 이용하여 엇갈림 격자계를 기준으로 식 (1), (4), (5)를 다음과 같이 차분하였다.

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{P_{i+1/2,j}^n - P_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{Q_{i,j+1/2}^n - Q_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{i+1/2,j}^{n+1} - P_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} + gh_{i+1/2,j} \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + g \frac{h_{i+1/2,j}^3}{3\Delta x} \left[ \frac{(\zeta_{i+2,j}^{n+1/2} - 3\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} + 3\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i-1,j}^{n+1/2})}{\Delta x^2} \right. \\ \left. + \frac{(\zeta_{i+1,j+1}^{n+1/2} - 2\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} + \zeta_{i+1,j-1}^{n+1/2}) - (\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\zeta_{i,j}^{n+1/2} + \zeta_{i,j-1}^{n+1/2})}{\Delta y^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_{i,j+1/2}^{n+1} - Q_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} + gh_{i,j+1/2} \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} + g \frac{h_{i,j+1/2}^3}{3\Delta y} \left[ \frac{(\zeta_{i,j+2}^{n+1/2} - 3\zeta_{i,j+1}^{n+1/2} + 3\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j-1}^{n+1/2})}{\Delta y^2} \right. \\ \left. + \frac{(\zeta_{i+1,j+1}^{n+1/2} - 2\zeta_{i,j+1}^{n+1/2} + \zeta_{i-1,j+1}^{n+1/2}) - (\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\zeta_{i,j}^{n+1/2} + \zeta_{i-1,j}^{n+1/2})}{\Delta x^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

식 (6)~(8)의 차분식에 사용된 엇갈림 격자계에서는  $\zeta$ 는 격자( $i,j$ ), 체적 흐름을  $P$ 와  $Q$ 는 각각 ( $i+1/2,j$ )와 ( $i,j+1/2$ )에서 정의되었다. 아울러 시간격자에 대해서도 엇갈림 격자계를 사용하였다.

### 3. 수치기법의 안정성 검토

본 연구에서 제안한 수치기법의 안정성을 검토하였다. 우선 본 연구에서 제안한 유한차분식 (6)~(8)의 해를 다음과 같은 Fourier 급수 형태로 표현할 수 있다고 가정했다(Lapius와 Pinder, 1982).

$$\zeta = \zeta_0 \rho^t e^{\hat{i}k_x x} e^{\hat{i}k_y y} \quad (9a)$$

$$P = P_0 \rho^t e^{\hat{i}k_x x} e^{\hat{i}k_y y} \quad (9b)$$

$$Q = Q_0 \rho^t e^{\hat{i}k_x x} e^{\hat{i}k_y y} \quad (9c)$$

여기서  $\zeta_0$ ,  $P_0$ ,  $Q_0$ 는 각각  $\zeta$ ,  $P$ ,  $Q$ 의 초기값이다. 식(9)를 식(6)~(8)에 대입하여 만들어진 관계식의 형태가 제차(homogeneous)이기 때문에 수학적으로 의미있는 해를 찾기 위해서 계수행렬의 행렬식(determinant)은 0이 되어야 하며, amplification factor,  $\rho^{\Delta t} \leq 1$ 의 안정조건을 만족해야한다. 안정성 검토를 통해 위의 조건을 만족시키면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\Delta x}{h} \geq 1.633, C_r \leq 0.707 \quad (10)$$

여기서  $C_r$ (Courant 수)는 차분식의 안정성을 판단하는 식으로서 동일한 시간간격 동안 유체가 이동하는 거리는 이산화 된 공간간격을 넘을 수 없다는 물리적 의미를 지니고 있다. 안전성 검토 결과, 본 연구에서 제안한 기법은 격자크기가 수심보다 1.633배 이상 크고, Courant 수가 0.707 이하의 경우 수치적으로 안정해진다고 결론지을 수 있다.

### 4. 수치기법의 검증

본 연구에서 제안한 수치기법의 정확성을 검증하기 위하여 Gauss 분포의 초기 자유수면변위에 대해 수치모의 한 결과와 선형 Boussinesq 방정식의 해석해(Carrier, 1991)를 비교하였다. Gauss 분포의 형태를 갖는 초기 자유수면변위는 다음과 같이 주어진다.

$$\zeta(r,0) = 2e^{-(r/a^2)} \quad (11)$$

여기서,  $a$ 는 Gauss 분포의 반지름이고  $r$ 은 중심으로부터의 거리를 나타낸다. Carrier(1991)는 선형 Boussinesq 방정식을 풀어서 Gauss 분포의 초기 자유수면변위에 대한 해석해를 구하였다. 식 (12)은 무차원 형태로 나타낸 Carrier의 해이다. prime(') 기호는 무차원 변수를 나타내고  $J_0$ 는 제1종 Bessel 함수이다.

$$\zeta(r,t) = \int_0^\infty k' e^{-k'^2/4} \cos\left(\frac{k' t'}{\sqrt{1+(k' h')^2/3}}\right) J_0(k' r') dk' \quad (12)$$

위 식으로부터 계산한 해석해와 본 연구에서 제안한 수치기법을 이용한 수치모의 결과를 비교하였다. 수심과 무차원 계산 시간간격을 0.1로 고정시키고 공간간격을 0.3~0.5로 변화시켜 Courant 수 변화에 따른 수치모의 결과를 해석해와 비교한 결과, Courant 수가 0.33일 경우 해석해와 가장 근접함을 알 수 있었으며, 또한 기존의 Cho 등(2007)의 기법에서도 Courant 수가 0.33일 경우 해석해에 가장 근접한 결과를 보여 Courant 수를 0.33으로 고정시키고 기법의 정확도를 검증하였다.

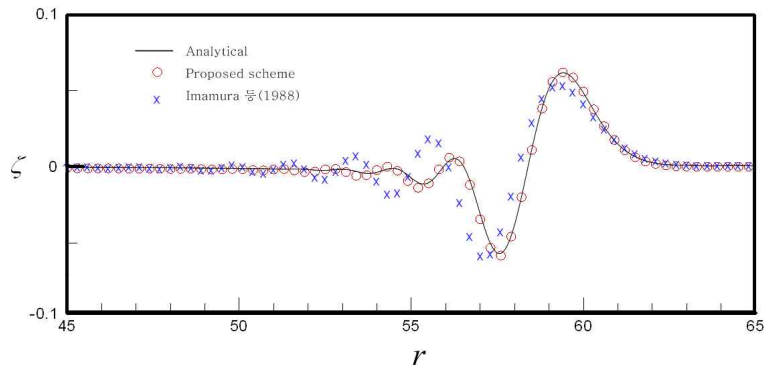


그림 1. Imamura 등(1988) 기법과 Proposed 기법의 비교

그림 1에서는  $h=0.1$ , 정사각형 격자( $\Delta x, \Delta y=0.3$ ), 무차원 계산 시간간격  $\Delta t=0.1$ 을 적용하였으며,  $t=60$ 일 때의 모의 결과를 해석해와 비교하여 나타낸 것으로, 초기 Gauss 분포의 중심점으로부터의 거리에 따라 결과를 표현하였다. Imamura 등(1988)의 기법에서는 선단파의 파봉이 해석해보다 작게 나타났으며 전파 양상이 다르게 나타났다. 반면에 본 연구에서 제안한 기법의 결과는 해석해와 비교적 정확하게 일치하고 있으며, 결과적으로 분산효과를 적절하게 고려하고 있는 것으로 판단되었다. 기존 Cho 등(2007)이 제안한 분산보정기법의 결과는 거의 동일한 정확도를 보여 Courant 수를 0.33으로 고정시키고 공간격자와 시간격자를 같은 비율로 증가시켜 수치모의한 결과로 비교하였다. 그림 2는 공간격자를 0.5, 시간간격을 0.166으로 수치모의한 결과이다. 공간격자와 시간간격을 변화시키며 수치모의한 결과, 기존의 기법보다 본 연구에서 제안한 기법이 해석해와의 오차가 적은 것으로 나타났으며 이것은 기존 기법의 격자 설정 범위 제약의 문제점을 극복한 결과로 판단된다. 또한, 그림 3은  $r=60$ 인 지점에서의 시간에 따른 자유수면변위를 나타낸 것으로, 해석해와 비교적 정확하게 일치하고 있음을 알 수 있다.

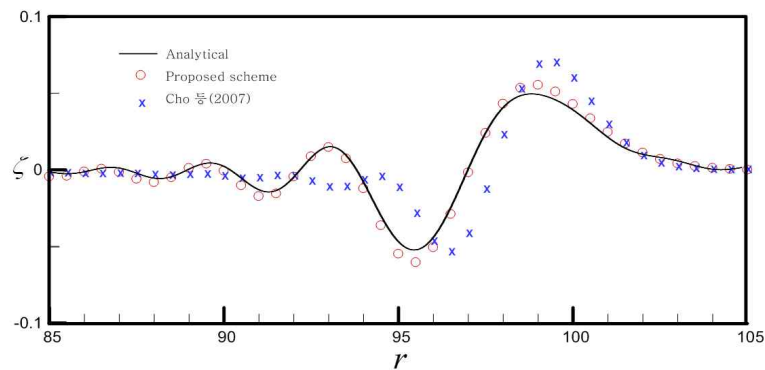


그림 2. Cho 등(2007) 기법과 Proposed 기법의 비교

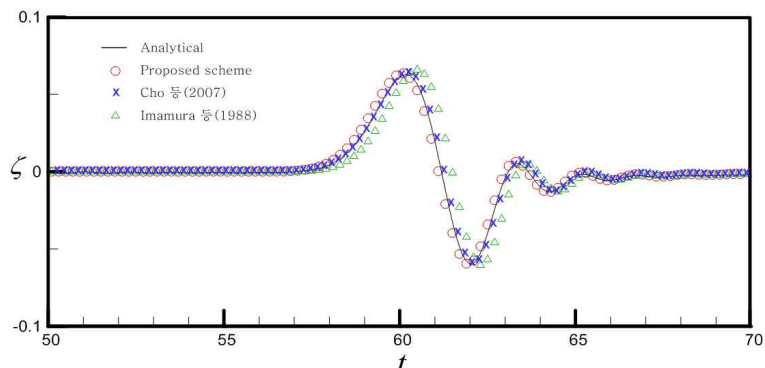


그림 3.  $r=60$  지점에서의 시간에 따른 자유수면변위

## 5. 결 론

기존의 지진해일 전파 모의 연구는 수치분산을 이용하여 물리적 분산을 표현하는 방향으로 진행되어왔다. 그 과정에는 수치오차가 완벽히 제거되지 않아 오차를 발생 시킬 수 있는 단점이 있다.

따라서 수치오차와 불필요한 계산시간을 줄이기 위해 본 연구에서는 유한차분법을 이용하여 선형 천수방정식이 아닌 선형 Boussinesq 방정식을 차분하여 물리적 분산효과를 직접적으로 고려한 기법을 제안하였다. 제안한 기법을 이용하여 Gauss 분포 형태의 초기 자유수면변위를 갖는 문제를 모의한 결과, 기존의 Imamura 등(1998) 기법에 비해 정확한 결과를 제공하였으며, Cho 등(2007)의 기법과 비슷한 정확도를 보였으나 본 연구에서 제안한 기법이 더 넓은 범위의 조건에서 정확도 높은 결과를 제공한다는 것을 확인할 수 있었다.

또한, 추후에 본 연구에서 제안한 기법을 수심변화가 완만한 실제 동해 지형에 적용하여 지진해일 전파모의를 수행하는 연구가 필요할 것으로 판단된다.

## 감 사 의 글

본 연구는 국토해양부 첨단항만건설기술개발사업(과제명: 항만권역 태풍 및 지진해일 재해대응체계 구축)의 연구비지원에 의해 수행되었습니다. 이에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

1. 윤성범, 임채호, 이종인(2004). 지진해일 전파 모의를 위한 2차원 유한차분모형의 능동적 분산보정기법, 대한토목학회논문집, 제19권, 제II-6호, pp. 695-703.
2. 조용식(1996). 대양을 횡단하는 지진해일의 수치모의, 대한토목학회논문집, 제16권, 제II-3호, pp. 695-703.
3. Carrier, G.F.(1991). Tsunami propagation from a finite source, Proc. of 2nd UJNR Tsunami Workshop, NGDC, Hawaii, pp. 101-115.
4. Cho, Y.-S., Sohn, D.-H. and Lee, S.-O.(2007). Practical modified scheme of linear shallow-water equations for distant propagation of tsunamis, Ocean Eng., Vol. 34, No. 8, pp. 1,769-1,777.
5. Imamura, F. and Goto, C.(1988). Truncation error in tsunami simulation by the finite difference method, Coastal Eng. in Japan, Vol. 31, pp. 245-263.
6. Kajiura, K. and Shuto, N.(1990). Tsunami. The SEA, Edited by B. Le Mehaute, and D.M. Hanes, Vol. 9, Part B, John Wiley & Sons, Inc., pp. 395-420.
7. Lapidus, L. and Pinder, G.F.(1982). Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, John Wiley & Sons, USA.