접선과 법선 전자파 경계조건의 등가성

Equivalence of tangential and normal boundary conditions for electromagnetic waves

조용희
목원대학교 정보통신공학과

Cho Yong-Heui
Mokwon University

요약

전자기파 경계치 문제를 효율적으로 해결하기 위해 접선과 법선 경계조건의 등가성을 증명한다. 4개의 맥스웰 방정식을 모두 이용하여 접선과 법선 경계조건이 등가성을 이루기 위한 조건을 유도한다. 본 연구에서 제안된 등가성을 위한 조건을 이용하여 전자기파 경계치 문제를 풀기 위한 연립식을 얻을 수 있을 것이다.

Abstract

In order to solve electromagnetic boundary value problems efficiently, we prove the equivalence of tangential and normal boundary conditions. Using four Maxwell's equations simultaneously, we deduce the conditions to satisfy the equivalence of tangential and normal boundary conditions for electromagnetic waves. The conditions proposed in this work can be used to obtain the simultaneous equations of electromagnetic boundary value problems.

I. 서론

전자파 경계조건은 전자파 산란 특성을 이해하기 위해 필수적인 도구이다 [1]-[5]. 일반적으로 전자파 경계조건 문제를 풀기 위해서는 접선 경계조건을 이용한다. 반드시 전기장과 자기장은 경계면의 접선 영역에서 양쪽영역에서 연속을 이루어야 한다. 이 조건은 일반적인 전자기학 교재에 상세히 증명이 되어 있다. 하지만, 전자기파의 접선 경계조건을 이용하여 3차원 전자파 산란 문제를 풀 때는 최종 일차연립방정식이 매우 복잡해져 [5] 전자파 산란을 수치해석적으로 처리하기 어렵다. 따라서, [5]에서는 법선 전자파 경계조건을 제안하여 전자파 산란 해석을 수치해석적으로 수월하게 처리하도록 하였다.

맥스웰 방정식의 유일성 정리를 고려하면 접선과 법선 경계조건들을 상호 등가성을 반드시 가져야 한다. 이에 대한 논의는 [4]에서 미소 폐회로 개념을 이용하여 이미 제안되었다. 하지만, 접선과 법선 경계조건의 등가성에 대해 수학적으로 엄밀한 증명은 [4]에서 이루어지지 않았다. 따라서, 본 논문에서는 기존의 접선 경계조건과 법선 경계조건이 동일한 방법인 것을 맥스웰 미분방정식을 이용하여 해석적으로 증명할 것이다.

Ⅱ. 접선과 법선 경계조건의 등가성

접선 전자파 경계조건 증명과 유사하게 법선 경계조건 증명의 시작은 맥스웰 미분방정식이다. 맥스웰 방정식중에서 패러데이 법칙과 암페어 법칙을 고려하자.

$$\bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t = i\omega \bar{B}_n,\ \bar{\nabla}_t \times \bar{H}_t = -i\omega \bar{D}_n \tag{1}$$

상호 경계면을 가진 양쪽 영역에서 (1)의 미분방정식을 반드시 성립해야 한다. 따라서, 영역 (I)과 (II)의 전자기파 성분을 서로 고려하여 빼주게 되면 아래 식 (2)를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(E^I_{t_2}-E^{II}_{t_2})-\frac{\partial}{\partial t_2}(E^I_{t_1}-E^{II}_{t_1}) \;=\; i\omega(B^I_n-B^{II}_n) \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(H^I_{t_2}-H^{II}_{t_2})-\frac{\partial}{\partial t_2}(H^I_{t_1}-H^{II}_{t_1}) \;=\; -i\omega(D^I_n-D^{II}_n) \tag{4}$$

여기서, t_1, t_2는 두 개의 접선방향 성분을 의미하고 n은 법선방향 성분을 표시한다. 위첨자 I과 II는 영역 (I)과 (II)의 전자기파를 표시하고 있다. 참고문헌 [4]. [5]에서 제시된 것처럼 접선방향 성분이 같으면 ($E^I_{t_1,t_2}=E^{II}_{t_1,t_2}$, $H^I_{t_1,t_2}=H^{II}_{t_1,t_2}$) 자동적으로 법선방향 성분의 연속성($D^I_n=D^{II}_n$, $B^I_n=B^{II}_n$)이 만족된다.

접선과 법선 경계조건의 등가성을 증명하기 위해서는 법선방향 성분이 연속인 경우 접선방향 성분이 자동으로 연속이 되는 것을 증명해야 한다. 하지만, 이는 (3)과 (4)에 대입하면 참일 수 없다. 왜냐하면 법선방향 연속은 식 (3)과 (4)의 좌변이 0이라는 사실만 알려줄 뿐 접선방향 성분의 연속을 알려줄 수는 없다. 이를 증명하기 위해서는 맥스웰의 4가지 방정식중에서 사용하지 않은 가우스 법칙과 비오-사바르 법칙을 사용해야 한다.

$$\bar{\nabla}_t\cdot\bar{E}_t = -\partial E_n/\partial n+\rho_e/\epsilon \tag{5}$$

$$\bar{\nabla}_t\cdot\bar{H}_t = -\partial H_n/\partial n+\rho_m/\mu \tag{6}$$

식 (5), (6)을 고려하면 법선방향 경계조건은 아래와 같이 성립해야 한다.

$$\frac{\partial}{\partial n}E^I_n-\frac{\rho^I_e}{\epsilon_I} \;=\; \frac{\partial}{\partial n}E^{II}_n-\frac{\rho^{II}_e}{\epsilon_{II}} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}H^I_n-\frac{\rho^I_m}{\mu_I} \;=\; \frac{\partial}{\partial n}H^{II}_n-\frac{\rho^{II}_m}{\mu_{II}} \tag{8}$$

법선방향 경계조건인 $D^I_n=D^{II}_n$, $B^I_n=B^{II}_n$, (7), (8)을 고려하고 접선 경계조건중 $E^I_{t_1}=E^{II}_{t_1}$, $H^I_{t_1}=H^{II}_{t_1}$만을 고려하면 아래 접선방향 관계식이 반드시 성립해야 한다.

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(E^I_{t_2}-E^{II}_{t_2}) \;=\; \frac{\partial}{\partial t_1}(H^I_{t_2}-H^{II}_{t_2}) \;=\; 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2}(E^I_{t_2}-E^{II}_{t_2}) \;=\; \frac{\partial}{\partial t_2}(H^I_{t_2}-H^{II}_{t_2}) \;=\; 0 \tag{10}$$

즉, 접선방향 성분 $E^I_{t_1,t_2}=E^{II}_{t_1,t_2}$, $H^I_{t_1,t_2}=H^{II}_{t_1,t_2}$은 t_1, t_2에 대해 반드시 상수여야 한다. 이를 표현하면 아래 식을 얻을 수있다.

$$\begin{aligned} E^I_{t_2} &= E^{II}_{t_2}+C_E \;\Rightarrow\; E^I_{t_2} = E^{II}_{t_2} \\ H^I_{t_2} &= H^{II}_{t_2}+C_H \;\Rightarrow\; H^I_{t_2} = H^{II}_{t_2} \end{aligned} \tag{11}$$

식 (11)에서 C_E, C_H는 임의의 상수이다. 접선 경계면상에 임의의 상수가 존재한다면 전기전류 혹은 자기전류가 존재해야 하므로 이는 가정에 맞지 않다. 그래서 C_E, C_H는 반드시 0이 되어야 한다. 따라서, 4개의 맥스웰 방정식을 모두 이용하면 법선 경계조건으로부터 접선 경계조건이 성립되는 것을 엄밀하게 증명할 수 있다.

■ 참 고 문 헌 ■

[1] L. F. Jelsma, E. D. Tweed, R. L. Phillips, and R. W. Taylor, "Boundary conditions for the four vector potential," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 18, no. 9, pp. 648-650, Sept. 1970.

[2] T. B. A. Senior and J. L. Volakis, "Derivation and application of a class of generalized boundary conditions," IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 37, no. 12, pp. 1566-1572, Dec. 1989.

[3] K. F. Warnick, R. H. Selfridge, and D. V. Arnold, "Electromagnetic boundary conditions and differential forms," IEE Proc. - Microw.

Antennas Propag., vol. 142, no. 4, pp. 326-332, Aug. 1995.

[4] C. Yeh, "Boundary conditions in electromagnetics," Phys. Rev. E, vol. 48, no. 2, pp. 1426-1427, Aug. 1993.

[5] 조용희, “비균질 매질을 가진 구형도파관 스텝의 전자파 산란”, 한국콘텐츠학회 2007 춘계 종합학술대회 논문집, vol. 5, no. 1, p. 115, 2007년 6월.