

상태의존적 시간지연을 고려한 선삭 공정의 안정성 해석

A stability analysis on the turning process considering state dependent time delay

*김필기¹, #석종원²

*P. Kim¹, #J. Seok (seokj@cau.ac.kr)²

¹ 중앙대학교 기계공학부 대학원, ² 중앙대학교 기계공학부

Key words : Method of multiple scales, Tool chatter, Stability, State-dependent delay, Large delay,

1. 서론

절삭 가공 시 절삭 공구와 공작물 사이에서 발생하는 chatter 진동 (Chatter vibration)은 절삭 정밀도 및 생산성의 저하, 공작 기계의 수명 단축 등의 원인이 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 절삭 가공 시스템의 안정성에 대한 많은 이론적/실험적 연구들이 수행되어 왔다[1-4]. 회전계를 포함하는 절삭 공정의 수학적 모델은 일반적으로 delay differential equation (DDE)으로 나타난다. 선반가공 시스템의 DDE 모델은 대체로 autonomous 하며, 밀링가공 시스템의 DDE는 시간 주기성을 갖는 계수를 포함하는 것으로 알려져 있다[4]. 절삭 가공의 시간지연은 대부분 상수 또는 시간 의존성을 고려한 것으로 취급되어왔지만[1-3], 최근 선삭 시스템의 안정성 해석 연구[4]에서는 DDE 시스템에 상태의존적 시간지연(State dependent time delay)을 도입하였다. 이러한 state dependent-DDE (SD-DDE)는 비선형이며, 상태의존적 시간지연에 기인하여 SD-DDE의 해는 미분 불가능하기 때문에, SD-DDE에 대한 해석은 DDE의 경우에 비해 복잡하다.

본 연구에서는, 상태의존적 시간지연을 고려한 선삭 가공 모델에 대한 안정성 해석을 위하여, SD-DDE에 대한 multiple scale analysis (MSA)를 수행하였다. 이 과정에서 시간지연의 스케일은 상대적으로 큰 것으로 취급하였다. MSA를 이용한 안정성 해석을 통하여 선삭 시스템의 안정성 한계 조건이 구하여졌으며, 이는 linear stability analysis (LSA)를 이용하여 수행된 연구 결과[4]와 비교되었다.

2. Tool 의 state-dependent differential equation

그림 1은 선삭 과정에서의 절삭 공구와 공작물의 개략도를 나타낸 것이다. 공작물을 강체로 가정하면서, 절삭 공구의 운동만을 고려한 선삭 시스템의 운동 방정식은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다. 여기에서 절삭 공구는 절삭력에 의해 가진되는 2 자유도 진동계이다.

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta_x \omega_x \dot{x}(t) + \omega_x^2 x(t) = F_x \quad (1a)$$

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta_y \omega_y \dot{y}(t) + \omega_y^2 y(t) = -F_y \quad (1b)$$

식 (1a), (1b)에서 ζ_x, ζ_y 는 x 및 y 방향의 감쇠비이고, ω_x, ω_y 는 고유진동수이다. F_x, F_y 는 절삭력을 의미하며, 다음과 같다.

$$F_x = K_x b h^q / m, \quad F_y = K_y b h^q / m. \quad (2)$$

이 식에서 m 은 절삭 공구의 등가 질량이고, K_x 와 K_y 는 절삭 계수 (Cutting coefficient)이며, b 는 절삭 깊이 (Depth of cut), h 는 칩 두께 (Chip thickness)이다. 선삭 공정에서, 칩 두께는 피드 (Feed) 및 피드 간 절삭 위치의 차이 (즉, 현재 (Current) 절삭 위치와 이전 (Delayed) 절삭 위치 간의 차이)에 의존적이다. 따라서, 칩 두께는 식 (3)에서와 같이 시간 지연 τ 만큼 지연된 상태량을 종속 변수로 갖는다[4].

$$h = v\tau(x_t) + y(t) - y(t - \tau(x_t)). \quad (3)$$

$$R\Omega\tau = 2R\pi + x(t) - x(t - \tau). \quad (4)$$

이러한 시스템의 운동 방정식은 DDE로 잘 알려져 있다. 피드 간 절삭 위치 사이에 발생하는 시간지연 τ 는 고정

값을 갖는 상수가 아니라, 시간지연을 포함한 절삭 위치의 함수로 식 (4)와 같다. 따라서, 절삭 공구 시스템의 운동 방정식은 SD-DDE의 형태를 갖는다.

State space analysis를 통하여, 식 (1)의 운동 방정식은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\dot{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}, \quad \mathbf{X} = [x, \dot{x}, y, \dot{y}]^T. \quad (5)$$

본 연구에서는 절삭 공구가 대칭적인 형태를 갖는 것으로 가정하였다($\zeta_x = \zeta_y = \zeta, \omega_x = \omega_y = \omega_n$). MSA를 이용한 안정성 해석을 수행하기 위하여 운동방정식의 감쇠항은 편의상 우변의 강제항 \mathbf{F} 에 포함되도록 하였다. 이어서, 식 (5)에 대한 Modal analysis를 수행하고 $\tilde{t} = \omega_n t$ 을 도입하면서, decoupled equation은 다음과 같이 정리되었다.

$$\dot{\mathbf{q}}(\tilde{t}) - \Lambda \mathbf{q}(\tilde{t}) = \mathbf{Y}\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_\tau). \quad (6)$$

식 (6)에서 $\mathbf{q}_\tau = \mathbf{q}(\tilde{t} - \tau)$ 이다.

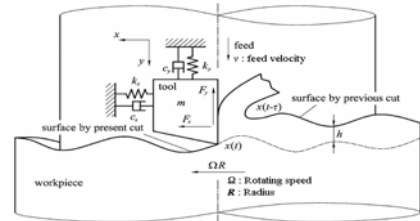


Fig. 1 Turning model [4]

2. Multiple scale analysis

비선형 절삭 공구 시스템의 안정성 해석을 위하여, SD-DDE에 대한 MSA를 수행하였다. 이 과정에서, 시간지연 τ 를 포함하는 비선형성은 SD-DDE의 asymptotic expansion 과정을 한층 어렵게 한다. 선삭 시스템에서의 시간지연 τ 의 스케일은 절삭 공구에서 발생하는 chatter 진동의 주기에 비해 매우 큰 "Large delay"로 알려져 있다[5]. 따라서, 절삭 공구 시스템은 시간지연에 의존적인 절삭력이 작은 반면, 시간지연의 스케일이 큰 경우에 해당한다. 이러한 large delay는 perturbation method의 formulation 과정에서 합리적으로 반영되어야 한다. 또한, 최근 선형화된 시간지연 $\bar{\tau}$ 가 시스템의 안정성에 지배적인 영향을 미친다고 보고된 바 있다[6]. 따라서, 본 연구에서는 상기 기술한 large delay와 linearized delay를 고려하여 운동방정식에 대한 asymptotic expansion을 수행하였다.

우선, large delay를 고려하기 위하여 $t^* = \tilde{t}/\varepsilon$ 을 새로이 도입하면서 식 (6)은 다음과 같이 재정리되었다.

$$\dot{\mathbf{q}}(t^*) - \Lambda' \mathbf{q}(t^*) = \varepsilon \mathbf{F}'(\mathbf{q}, \mathbf{q}_\tau) \quad (7)$$

where, $\Lambda' = \varepsilon \Lambda, \quad \mathbf{F}' = \mathbf{Y}\mathbf{F}, \quad \tau^* = \tau/\varepsilon.$

식 (7)의 τ^* 는 large delay를 의미한다. 미소 파라미터 ε 에 따른 asymptotic solution과 time scale은 다음과 같다.

$$\mathbf{q} = \varepsilon \mathbf{q}^{(0)}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 \mathbf{q}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^3 \mathbf{q}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) + \dots, \quad (8a)$$

$$t^* = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots, \quad T_n = \varepsilon^n t^*, \quad \frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (8b)$$

식 (8a), (8b)를 식 (7)에 적용하면서, 강제항 \mathbf{F}' 을 평형상태

에서 전개하고 시간지연 항 \mathbf{q}_τ 를 ε 에 대하여 전개하면, ε order equation 은 식 (9a)–(9c)와 같이 정리된다.

$$\varepsilon^1 : \dot{\mathbf{q}}^{(0)} - \mathbf{A}'\mathbf{q}^{(0)} = 0, \quad (9a)$$

$$\varepsilon^2 : \dot{\mathbf{q}}^{(1)} - \mathbf{A}'\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{F}^{(1)} - D_1\mathbf{q}^{(0)}, \quad (9b)$$

$$\varepsilon^3 : \dot{\mathbf{q}}^{(2)} - \mathbf{A}'\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{F}^{(2)} - D_1\mathbf{q}^{(1)} - D_2\mathbf{q}^{(0)}. \quad (9c)$$

식 (9b) 및 (9c)에 표현되지는 않았지만, $\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{F}^{(1)}, \mathbf{F}^{(2)}$ 는 시간지연에 의존적이다.

식 (9a)의 해는 식 (10)으로 나타낼 수 있다.

$$q_k^{(0)} = [P_k^{(0)}(T_1, T_2, \dots) + iQ_k^{(0)}(T_1, T_2, \dots)]e^{i\omega_k T_0}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

여기에서, $P_k^{(0)}, Q_k^{(0)}$ 는 T_1, T_2, \dots 에 따라 변하는 실수 값이며, ω_k 는 고유진동수이다. $q_k^{(0)}$ 를 식 (9b)에 대입하고 solvability condition 을 적용함으로써, $P_k^{(0)}, Q_k^{(0)}$ 에 대한 1 차 modulation equation 이 구하여질 수 있다. 마찬가지로 방법을 반복함으로써 고차의 modulation equation 또한 구하여질 수 있으며, 1 차 및 2 차 modulation equation 은 다음과 같다.

$$\varepsilon^2 : D_1\mathbf{B} = (\mathbf{F}'_1)_{SCT} = \mathbf{f}_1(\mathbf{B}, \mathbf{B}_\tau), \quad (11a)$$

$$\varepsilon^3 : D_2\mathbf{B} = (\mathbf{F}'_2 - D_1\mathbf{q}_1)_{SCT} = \mathbf{f}_2(\mathbf{B}, \mathbf{B}_\tau). \quad (11b)$$

식 (11a)와 (11b)에서 $\mathbf{B} = [P_1^{(0)}, P_3^{(0)}, Q_1^{(0)}, Q_3^{(0)}]^T$ 이며, 아래 첨자 SCT 는 secular term 의 계수를 의미한다.

3. Stability analysis

절삭 공구의 안정성은 MSA 를 통해 얻어진 modulation equation 의 고유치 문제를 해석함으로써 구하여질 수 있다. 식 (11a)와 (11b)는 DDE 의 형태를 띄며, 이에 대한 일반적인 characteristic equation 의 형태는 식 (12)와 같이 주어진다. 식 (12)에서 exponential 항은 시간지연에 대한 의존성이 반영된 것이다. 이러한 형태의 다항식은 “quasi-polynomial”으로 알려져 있다[7].

$$|\mathbf{J}_0 + e^{-\lambda\tau_1}\mathbf{J}_{\tau_1} + e^{-\lambda\tau_2}\mathbf{J}_{\tau_2} + \dots + e^{-\lambda\tau_n}\mathbf{J}_{\tau_n} - \lambda\mathbf{I}| = 0. \quad (12)$$

식 (12)로부터 구하여진 λ 의 실수부가 음수인 경우, 시스템은 안정하며, 반대로 양수인 경우에는 불안정하다. 따라서, 시스템의 안정성 한계(Stability boundary)는 λ 의 실수부가 0 인 조건을 적용함으로써 구하여질 수 있다.

4. Numerical simulation

앞서 구하여진 modulation equation 의 고유치 해석을 바탕으로, 절삭 공구 모델(SD-DDE)에 대한 안정성 해석을 수행하였다. MSA 를 통하여 구하여진 안정성 결과는 LSA 를 바탕으로 한 기존의 안정성 해석 결과[4]와 비교되었다. 또한, 상태의존적 시간지연을 고려하지 않은 절삭 공구 모델(DDE)에 대한 안정성 해석을 수행하고 이 결과를 SD-DDE 시스템의 해석 결과와 비교하였다.

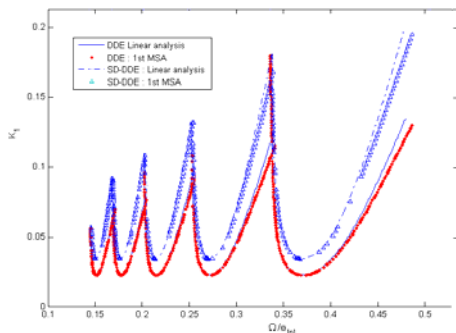


Fig. 2 MSA vs. Linear stability for (SD-)DDE ($\zeta = 0.02, q = 0.75, k_r = 0.3, \rho = 0.1$)

그림 2 는 DDE 및 SD-DDE 시스템에 대한 안정성 한계 곡선을 $(\Omega/\omega_n, K_1)$ 공간에 나타낸 것이다. 그림 2 에서 $K_1 = (K_y b q (2\pi R)^{q-1}) / (m \omega_n^2)$, $\rho = \nu / (R\Omega)$ 이다. 1 차 modulation

equation 을 적용한 경우와 LSA 를 적용한 경우의 안정성 한계 곡선을 비교한 결과, 공작물의 회전 속도가 작은 경우에는 동일한 결과를 나타내는 반면, 회전 속도가 증가할수록, MSA 와 LSA 를 적용한 임계 곡선의 차이가 커짐을 확인할 수 있다. 그림 3 에는 2 차 modulation equation 를 추가적으로 고려한 안정성 한계 곡선을 나타내었으며, 그림에서 확인할 수 있듯이, 회전속도가 큰 영역에서 안정성 결과가 LSA 의 결과와 유사한 결과를 보이고 있다.

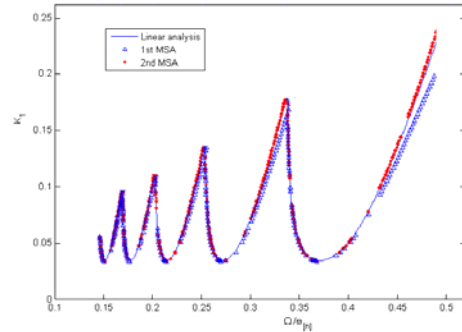


Fig. 3 1st and 2nd MSA vs. Linear stability for SD-DDE ($\zeta = 0.02, q = 0.75, k_r = 0.3, \rho = 0.1$)

4. 결론

본 연구에서는 선삭 공정에서 발생하는 chatter 진동에 대한 안정성 해석을 수행하였다. 이를 위해, 공작물을 강제로 가정한 절삭 공구에 대한 SD-DDE 에 MSA 를 적용하였다. 시간지연은 large delay 로 고려되었으며, modulation equation 의 고유치 문제를 해석함으로써 chatter 안정성에 대한 임계 조건을 구하였다. 1st MSA 를 적용한 임계 안정성 해석 결과, DDE 및 SE-DDE 시스템에서 공히 LSA 의 결과와 유사한 경향을 나타내었으나, 공작물의 회전속도가 클수록 LSA 결과와의 차이가 증가하는 것으로 확인되었다. 2nd MSA 의 결과에서는 이러한 오차가 크게 개선되었다.

본 연구에서는 MSA 를 이용하여 SD-DDE 인 절삭 공구 시스템의 안정성평가를 수행하였으며, 이를 통해 SD-DDE 에 대한 해석 방법으로 MSA 의 적용 가능성을 확인하였다. MSA 는 비선형 해석에 강력한 방법이며, 향후 복잡한 절삭 시스템의 비선형 해석에 유용하게 적용될 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

1. Tobias, S.A., “Machine Tool Vibration,” Blackie, London, 1965.
2. Long, X.-H., Balachandran, B. and Mann, B.P. “Dynamics of milling processes with variable time delay,” *Nonlinear Dyn.*, **47**, 49–63, 2006.
3. Insperger, T. and Stepan, G., “Stability analysis of turning with periodic spindle speed modulation via semi-discretization,” *J. Vib. Control*, **10**, 1835–1855, 2004.
4. Insperger, T., Stepan, G. and Turi, J., “State-dependent delay in regenerative turning processes,” *Nonlinear Dyn.*, **47**, 275–283, 2007.
5. Das, S.L. and Chatterjee, A., “Second order multiple scales for oscillators with large delay,” *Nonlinear Dyn.*, **39**, 375–394, 2005.
6. Hartung, F. and Turi, J., “Linearized stability in functional differential equations with state-dependent delays,” *Proceedings of the conference Dynamical Systems and Differential Equations*, added volume of *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 416–425, 2000.
7. Michiels, W. and Niculescu, S.-I., “Stability and stabilization of time-delay systems: An eigenvalue-based approach,” SIAM, Philadelphia, 2007.