서로소인 경로 커버의 일반화

박 정흠[O]
가톨릭대학교 컴퓨터정보공학부
j.h.park@catholic.ac.kr

Generalization of Disjoint Path Covers

Jung-Heum Park[O]
School of Computer Science and Information Engineering, The Catholic University of Korea

요 약

그래프에서 k-서로소인 경로 커버는 정점 집합을 커버하면서 정점이 서로소인 k개의 경로들의 집합으로 정의하고, 이때 각 경로는 주어진 소스와 싱크를 잇는다. 각 소스와 싱크에 요구(demand)라고 부르는 양의 정수가 주어질 때, 요구가 d인 각 소스나 싱크가 d개의 경로에 포함되는 *일반-요구 k-서로소인 경로 커버(general-demand k-disjoint path cover)*를 정의할 수 있다. 이것은 일대일, 일대다, 그리고 비쌍형 다대다 서로소인 경로 커버를 일반화한 것이다. 이 논문에서는 일반-요구 k-서로소인 경로 커버 문제가 비쌍형 k-서로소인 경로 커버 문제로 변환될 수 있음을 보인다. 더구나 소스가 하나인 경우를 단일-소스 k-서로소인 경로 커버*(single-source k-disjoint path cover)*라고 부르는데, 이것은 일대다 k-서로소인 경로 커버 문제로 변환된다.

1. 서 론

상호연결망은 그래프로 모델할 수 있는데, 정점과 에지는 각각 노드와 통신 링크에 대응된다. 상호연결망에서 중요한 문제 중의 하나는, 노드 사이의 라우팅이나 선형 배열의 임베딩(embedding)과 관련하여 정점이 서로소인 경로를 찾는 것이다. 정점이 서로소인 경로는 노드들 사이에 효율적인 데이터 라우팅을 위한 병렬 경로로 사용될 수 있다.

서로소인 경로는 세 유형으로 분류할 수 있다: 일대일(one-to-one), 일대다(one-to-many), 그리고 다대다(many-to-many). 일대일 유형은 단일 소스(source) s와 단일 싱크(sink) t를 잇는 서로소인 경로를 말한다. 일대다 유형은 단일 소스 s와 k개의 싱크 $t_1,t_2,\ldots,t_k$를 잇은 서로소인 경로이고, 다대다 유형은 k개의 소스 $s_1,s_2,\ldots,s_k$와 k개의 싱크 $t_1,t_2,\ldots,t_k$를 잇은 서로소인 경로를 말한다.

보통 상호연결망의 신뢰도(reliability) 혹은 고장 감내도(fault tolerance)에 대한 척도는, 고장이 없는 노드들 사이에 통신을 두절시키지 않고 고장이 발생할 수 있는 최대 노드수로 주어진다. 상호연결망의 연결도(connectivity)는 노드 고장에 대한 신뢰도에 대응한다. 그래프 G의 연결도가 서로소인 경로라는 개념으로 특성을 밝힐 수 있음은 널리 알려져 있다.

Menger의 정리에 따르면 그래프 G가 k-연결될(k-connected) 필요충분조건은 임의의 소스와 싱크의 쌍 s, t에 대하여 그것을 잇는 일대일 유형의 서로소인 경로가 k개 존재한다는 것이다. 또한 소위 Fan Lemma가 말하는 그래프 G가 k-연결될 필요충분조건은 단일 소스 s와 서로 다른 k개의 싱크 $t_1,t_2,\ldots,t_k$를 잇는 일대다 유형의 서로소인 경로가 k개 존재한다는 것이다[1]. 더구나 그래프 G가 k-연결될 필요충분조건은 k개의 서로 다른 소스 $s_1,s_2,\ldots,s_k$와 k개의 서로 다른 싱크 $t_1,t_2,\ldots,t_k$를 잇은 k개의 서로소인 경로가 존재한다는 것인데, 만약 소스 s_i가 싱크 t_j와 일치하면 s_i (혹은 t_j) 자체를 경로라고 간주한다. 다시 말하면, $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_k\}$, $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_k\}$라고 할 때, 이 조건이 말하는 것은 $S=T$이거나 혹은 $F=S\cap T$, $k'=k-|F|$라고 할 때, $G\backslash F$는 $S\backslash F$와 $T\backslash F$를 잇는 다대다 유형의 서로소인 경로가 k'개 존재한다는 것이다.

그래프 G에서 세 유형의 서로소인 경로가 G의 모든 정점을 커버하는 개념으로 확장할 수 있다. 그래프 G의 *k-서로소인 경로 커버*는 (간략히 k-DPC라고 쓴다) G의 모든 정점을 커버하는 k개의 서로소인 경로들의 집합이다. k-DPC 문제는 노드를 완전히 활용하는 응용과 관련된다[12]. k-DPC를 찾는 문제도 세 유형으로 나눌 수 있다.

일대일 k-DPC 문제에서는 단일 소스와 단일 싱크가 주어지고, k-DPC는 소스와 싱크에서 중복된다. 일대다

k-DPC 문제에서는 단일 소스와 k개의 싱크가 주어지는데, k-DPC는 소스에서만 중복된다. 다대다 k-DPC 문제에서는 k개의 소스와 k개의 싱크가 주어지는데, k-DPC는 그래프의 정점 집합을 분할한다. *쌍형(paired)* 다대다 k-DPC 문제에서는 각 소스 s_i는 미리 정해진 싱크 t_i와 연결되어야 한다. 반면에 *비쌍형(unpaired)* 다대다 k-DPC 문제에서는 $\{1,2,...,k\}$의 어떤 순열 σ에 대하여 소스 s_i는 싱크 $t_{\sigma(i)}$에 자유롭게 연결될 수 있다. 고장인 요소를 (정점이나 에지) 가진 그래프의 k-DPC는 고장 요소를 제거한 그래프에서 k-DPC를 의미한다.

일대일 k-DPC에 대해서는 재귀원형군[8,15], 고장 에지를 가진 하이퍼큐브[2] 등이 연구되었다. 일대일 k-DPC는 k*-container라고도 알려져 있다[2,15]. 고장 요소를 가진 하이퍼큐브형 상호연결망에서 일대다 k-DPC[9], 쌍형 다대다 k-DPC[12,13], 비쌍형 다대다 k-DPC[10]에 대한 연구 등이 발표되어 있다. Lai 등[7]은 5-차원 이상의 crossed cube, twisted cube, Möbius cube는 경로의 길이가 같은 쌍형 2-DPC를 가진다고 보였다. 최근에 이분 그래프에 대한 연구도 발표되고 있다. Gregor 등과[6] Dvořák 등은[5] 각각 고장이 없는, 에지 고장을 가진 하이퍼큐브에서 쌍형 다대다 k-DPC 문제를 연구하였고, Chen은 [3], [4]에서 각각 고장 에지를 갖는 하이퍼큐브와 하이퍼큐브에 에지를 추가한 이분 그래프에서 비쌍형 다대다 k-DPC를 연구하였다.

이 논문에서는 위에서 언급한 (쌍형 다대다 DPC 문제를 제외하고) 일대일, 일대다, 그리고 비쌍형 다대다 DPC 문제를 일반화한 DPC 문제를 제안하고자 한다. 먼저 각 소스와 싱크에 *요구(demand)*라고 부르는 양의 정수를 부여하는데, 소스에 주어진 요구들의 합과 싱크에 주어진 요구들의 합은 모두 k로 같다. 요구가 부여된 k_S개의 소스들의 집합 S와 k_T개의 싱크들의 집합 T가 주어질 때, S와 T를 잇는 k-DPC를 찾고자 하는데, 이때 요구가 p인 소스는 p개의 경로에 포함되어야 하고 요구가 q인 싱크는 q개의 경로에 포함되어야 한다.

이 문제는 $k_S = k_T = 1$이고 소스와 싱크의 요구가 k이면 일대일 k-DPC와 같은 문제가 된다. $k_S = 1$이고 $k_T = k$이며, 소스의 요구는 k이고 싱크들의 요구가 모두 1일 때, 일대다 k-DPC 문제가 된다. 마지막으로 $k_S = k_T = k$이고 모든 소스와 싱크의 요구가 1로 주어지면, 비쌍형 다대다 k-DPC 문제가 된다. 일반화된 문제를 위에서 말한 것과 구별하기 위하여 *일반-요구 k-DPC (general-demand k-DPC)* 문제라고 부른다.

고장 요소들의 집합 F를 가진 그래프 G에서 일반-요구 k-DPC 문제를 엄밀하게 정의하기로 한다. $S=\{s_1,s_2,...,s_{k_S}\}$를 소스들의 집합이라고 하고, $T=\{t_1,t_2,...,t_{k_T}\}$를 싱크들의 집합이라고 하자. S와 T는 공집합이 아니며, $S,T \subset V(G) \backslash F$이고 $S \cap T = \varnothing$이다. 각각의 소스와 싱크는 요구 $d(\cdot)$를 가지는데 $\sum_{s_j \in S} d(s_j) = \sum_{t_j \in T} d(t_j) = k$이다. $V(P_i)$와 $V(G)$를 각각 P_i와 G의 정점 집합을 나타낸다고 하자. S와 T를 잇는 k-DPC는 다음 조건을 만족하는 k개의 서로소인 경로 P_i $(1 \le i \le k)$들의 집합이다: (a) $\bigcup_{1 \le i \le k} V(P_i) = V(G) \backslash F$, (b) 만약 $i \ne j$이면 $V(P_i) \cap V(P_j) \subset S \cup T$, (c) 모든 $1 \le i \le k$에 대하여 P_i는 고장 요소를 포함하지 않고, (d) $\sum_{1 \le i \le k} I(s_j, P_i) = d(s_j)$이고 $\sum_{1 \le i \le k} I(t_j, P_i) = d(t_j)$이다. 여기서 $I(x, P_i)$는 $x \in V(P_i)$인지 아닌지를 나타내는 0/1-변수이다. 이런 서로소인 경로 커버를 k-DPC $[S,T|G,F]$라고 표기한다.

고장 집합 F를 가진 그래프 G에 주어진 S, T에 대하여 S와 T를 잇는 일반-요구 k-DPC가 존재하는가를 결정하는 문제는 NP-완전(NP-complete)이다. 왜냐하면, 일대일 k-DPC, 일대다 k-DPC, 그리고 쌍형이든 비쌍형이든 다대다 k-DPC가 존재하는가 하는 문제가 NP-완전이기 때문이다[12,13]. 이 논문에서는 고정된 S, T에 대한 일반-요구 k-DPC보다 임의의 S, T에 대한 일반-요구 k-DPC를 고려한다. 이를 다음과 같이 정의한다.

정의 1. 그래프 G에서 $V(G) \backslash F$의 부분 집합인 임의의 소스 집합 $S=\{s_1,s_2,...,s_{k_S}\}$와 싱크 집합 $T=\{t_1,t_2,...,t_{k_T}\}$에 대하여 $S,T \subset V(G) \backslash F$이고 $S \cap T = \varnothing$이며 $\sum_{s_j \in S} d(s_j) = \sum_{t_j \in T} d(t_j) = k$일 때, $|F| \le f$을 만족하는 임의의 고장 집합 F에 대하여 k-DPC$[S,T|G,F]$를 가지면 그래프 G를 *f-고장 일반-요구 k-DPC를 가지는 그래프(f-fault general-demand k-disjoint path coverable graph)*라고 말한다.

이 논문에서는 먼저 f-고장 일반-요구 k-DPC 문제를 $f'+k'=f+k$를 만족하는 어떤 $f' \ge f$와 $k' \le k$에 대하여 f'-고장 비쌍형 다대다 k'-DPC 문제로의 변환을 논의한다. 그리고 어떤 한계 B에 대하여 $f+k \le B$를 만족하는 임의의 f, k에 대하여 f-고장 비쌍형 다대다 k-DPC를 가지는 그래프에서, f-고장 일반-요구 k-DPC는 $f'+k'=f+k$를 만족하는 어떤 $f' \ge f$와 $k' \le k$에 대한 f'-고장 비쌍형 다대다 k'-DPC로부터 설계할 수 있음을 보인다. 소스가 하나밖에 없는 경우 (싱크가 하나인 경우는 대칭적임) 일반-요구 k-DPC

문제를 *단일-소스 k-DPC(single-source k-DPC)*라고 부른다. f-고장 단일-소스 k-DPC 문제는 f-고장 일대다 k-DPC 문제로 변환될 수 있음을 보인다. 이 과정에서 f-고장 일대다 k-DPC가 존재할 필요조건을 유도한다.

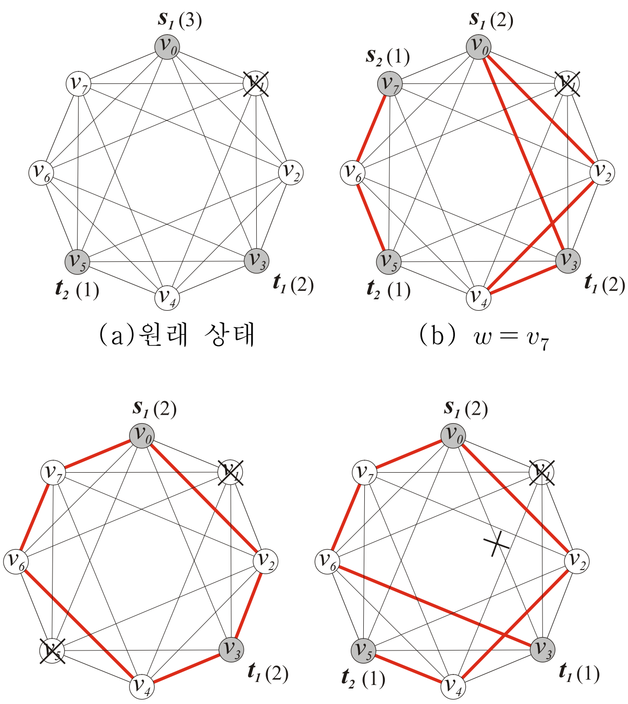
2. 일반-요구 DPC 문제의 변환

그래프 G가, $f+2k \le |V(G)|$이고 $|F| \le f$을 만족하는 임의의 고장 집합 F에 대하여, $S \cap T = \varnothing$를 만족하는 임의의 k개 소스들의 집합 S와 k개 싱크들의 집합 T를 잇는 비쌍형 다대다 k-DPC를 가지면, *f-고장 비쌍형 다대다 k-DPC를 갖는 그래프(f-fault unpaired many-to-many k-disjoint path coverable graph)*라고 부른다. 소스와 싱크를 *터미널(terminal)*이라고 한다. 고장이 아니고 터미널이 아닌 정점을 *자유 정점*이라고 하고, 양 끝점이 자유 정점이고 고장이 아닌 에지를 *자유 에지*라고 한다. 경로는 정점의 열(sequence)로 나타낸다. *$v-w$ 경로*는 v에서 w까지 가는 경로를 말하고, *v-경로*는 v에서 출발하는 경로를 말한다.

그래프 G가 S와 T를 잇는 일반-요구 k-DPC를 가진다고 하자. $G \backslash F$에서 S와 T를 잇는 DPC를 P라고 나타내자. 각 터미널에 대하여, 소스 s_i라고 하면, P에는 s_i와 싱크들을 잇는 $d(s_i)$개의 경로가 있다. $d(s_i) \ge 2$라고 해보자. 그 경로들 중에서 임의의 s_i-경로 하나를 $(s_i, w, \ldots, t_j)$라고 둔다. 정점 w는 고장 정점도 아니고 소스도 아니기 때문에, w는 자유 정점이거나 싱크이다. 더구나 에지 (s_i, w)는 반드시 고장이 아니고, w가 싱크라면 w는 t_j와 같아야 되고 그 경로는 (s_i, t_j)이어야 한다.

$D(G)$를 $\sum_{s_i \in S}\{d(s_i)-1\} + \sum_{t_j \in T}\{d(t_j)-1\}$, 즉 모든 싱크와 소스의 초과 요구의 합이라고 두자. 이 관찰에 근거하여 그래프 G에서 일반-요구 DPC를 초과 요구의 합이 더 작은 일반-요구 DPC로부터 다음과 같이 설계할 수 있다. w를 s_i에 고장이 아닌 에지로 인접한 "어떤" 자유 정점이나 싱크라고 두자.

1. 만약 w가 자유 정점이면, 그것을 단위 요구를 갖는 소스라고 간주하고 s_i의 요구를 일만큼 감소시킨다. 그러고 나서 일반-요구 k-DPC를, 존재한다면, 찾은 다음 w-경로를 $(s_i, w-$경로$)$로 교체한다. 예를 들면, 그림 1(a)의 3-DPC는 그림 1(b)의 3-DPC로부터 (v_7, v_6, v_5)를 (v_0, v_7, v_6, v_5)로 교체하여 얻을 수 있다. 그림에서 정점이나 에지 위의 ×는 해당 요소가 고장임을 나타낸다. 터미널의 요구는 괄호 속에 표시되어 있다.
2. 만약 w가 단위 요구를 갖는 싱크이면, 그것을 가상의 고장 요소라고 간주하고 $d(s_i)$를 일만큼 감소시킨다. 그러고 나서 일반-요구 $k-1$-DPC를, 존재한다면, 찾고 경로 (s_i, w)를 $k-1$-DPC에 추가한다. 예를 들면, 그림 1(a)의 3-DPC는 그림 1(c)의 2-DPC로부터 얻을 수 있다.
3. 만약 w가 2 이상의 요구를 갖는 싱크라면, 에지 (s_i, w)를 가상의 고장이라고 간주하고 각각 $d(s_i)$와 $d(w)$을 일만큼 감소시킨다. 그러고 나서 일반-요구 $k-1$-DPC를, 존재한다면, 찾고 경로 (s_i, w)를 $k-1$-DPC에 추가한다. 예를 들면, 그림 1(a)의 3-DPC는 그림 1(d)의 2-DPC로부터 얻을 수 있다.



(a)원래 상태 (b) $w=v_7$

(c) $w=v5$ (d) $w=v_3$

그림 1. 초과 요구의 합이 더 작은 일반-요구 DPC로의 변환

그래프 G가 일반-요구 k-DPC를 가지고 있고 w를 신중하게 잘 선택하면, 위의 셋 중에 하나는 항상 적용할 수 있다는 것은 자명하다. 물론, G가 일반-요구 k-DPC를 가지지 않으면 어떤 것도 적용할 수 없다. 여기서 문제는 "적절한" w를 선택하는 것이 쉽지 않다는 것이다. 일반적으로 말하면, 임의로 w를 선택하는 것은 충분하지 않다.

한편, 이 논문은 어떤 한계 B에 대하여 $f+k \le B$를 만족하는 임의의 f, k에 대하여 f-고장 일반-요구 k

-DPC를 가지는가 하는 문제에 관심이 있다. 그래프 G가 그렇게 되기 위해서는, 임의의 f, k에 대하여 f-고장 비쌍형 다대다 k-DPC를 가져야 한다. 그래프가 f-고장 비쌍형 다대다 k-DPC를 가질 필요조건이 [13]에 다음과 같이 제시되어 있다.

보조 정리 1. [13] 만약 그래프 G가 f-고장 비쌍형 다대다 $k(\geq 2)$-DPC를 가진다면, $\delta(G) \geq \kappa(G) \geq f+k$이다. 여기서, $\delta(G)$는 G의 최소 분지수이고, $\kappa(G)$는 G의 연결도이다. 더구나 G가 $f+2k+1$개 이상의 정점을 가지고 있으면, $\delta(G) \geq f+k+1$이다.

위에서 살펴 본 일반-요구 DPC 문제의, 초과 요구의 합이 더 작은 일반-요구 DPC 문제로의 변환을 다시 살펴보자. w가 자유 정점인 첫째 경우에, 고장 요소의 수와 소스들의 총 요구는 변화가 없다. w가 싱크인 둘째, 셋째 경우에 고장 요소의 수는 (가상 고장을 포함하여) 하나 증가하였고 소스들의 총 요구는 하나 감소하였다. 어떤 경우에도, 고장 요소의 수와 소스들의 총 요구의 합은 변화가 없다.

이제부터 그래프 G는, 어떤 한계 B에 대하여 $f+k \leq B$를 만족하는 임의의 $f \geq 0$, $k \geq 1$에 대하여 f-고장 비쌍형 다대다 k-DPC를 가진다고 가정한다. 그래서 $|V(G)| \geq f+2k$이고 $f+k \leq \delta(G)$이다. 이 가정 하에서, $f+k \leq B$이면서 f개의 고장을 가지고 총 요구가 k인 그래프 G에서 일반-요구 k-DPC 문제는 $f'+k' \leq B$인 어떤 $f' \geq f$, $k' \leq k$에 대하여 $|S|=|T|=k'$이고 f'개의 고장을 갖는 G에서 비쌍형 다대다 k-DPC 문제로 변환할 수 있음을 보이고자 한다. 사실, $f'+k'=f+k$이다. 대략 말하면, 요구가 2 이상인 소스에 (각각 싱크에) 고장 아닌 에지로 인접한 자유 정점이나 싱크를 (각각 소스를) 임의로 선택하는 것으로 충분하다는 것이다.

일반-요구 DPC 문제에 대한 알고리즘

/* $|V(G)| \geq f+2k$이고, 어떤 B에 대하여 $f+k \leq B$이라고 가정한다. */

1. 만약 $D(G)=0$이면, 비쌍형 다대다 k-DPC $[S,T\,|\,G,F]$를 찾고 서로소인 경로들의 집합 P를 되돌려 준다.
2. 그렇지 않으면, 요구가 2 이상인 임의의 터미널을 선택하는데, 그것을 소스 s_i라고 하자. s_i에 인접하면서 $w \in V \backslash (S \cup F)$이고 $(s_i,w) \not\in F$인 임의의 정점을 w라고 하자.
   (a) w가 자유 정점인 경우:
   $d(s_i)$를 일만큼 감소시킨다. $S' := S \cup \{w\}$, $d(w) := 1$이라고 둔다. $P = k$-DPC$[S',T\,|\,G,F]$를 찾고 $P \cup \{(s_i,P_w)\} \setminus P_w$를 되돌려 준다. 여기서 P_w는 P에서 w-경로이다.
   (b) w가 싱크이고 $d(w)=1$인 경우:
   $d(s_i)$를 일만큼 감소시킨다. $T' := T \backslash w$, $F' := F \cup \{w\}$라고 둔다. $P = k-1$-DPC$[S,T'\,|\,G,F']$를 찾고 $P \cup \{(s_i,w)\}$를 되돌려 준다.
   (b) w가 싱크이고 $d(w) \geq 2$인 경우:
   $d(s_i)$와 $d(w)$를 각각 일만큼 감소시킨다. $F' := F \cup \{(s_i,w)\}$라고 둔다. 먼저 $P = k-1$-DPC $[S,T\,|\,G,F]$를 찾고 $P \cup \{(s_i,w)\}$를 되돌려 준다.

우선 요구가 2 이상인 임의의 터미널에 대하여, 경우 2(a), 2(b), 2(c) 중에서 최소한 하나는 적용할 수 있음을 보인다.

보조 정리 2. 그래프 G가 필요조건 $f+k \leq \delta(G)$를 만족한다면, 요구가 2 이상인 터미널에, 소스 s_i라고 하자, $w \in V \backslash (S \cup F)$이고 $(s_i,w) \not\in F$를 만족하는 인접한 정점 w가 항상 존재한다.

증명. 모순을 보이기 위하여, 그런 정점 w가 존재하지 않는다고, 즉 s_i에 인접한 임의의 정점 v에 대하여 (i) $v \in S$, (ii) $v \in F$, 혹은 (iii) $(s_i,v) \in F$가 성립한다고 가정하자. s_i에 인접한 (조건 (i)을 만족하는) 소스의 수는, s_i의 요구가 2 이상이기 때문에, 기껏해야 $k-2$개이다. 더구나 s_i에 인접하고 조건 (ii)나 (iii)을 만족하는 정점은 기껏해야 f개이다. 따라서 s_i에 인접하면서 위의 조건 (i), (ii), 혹은 (iii)을 만족하는 정점의 개수는 $f+k-2$개 이하이다. 이 말은 s_i의 분지수가 최대 $f+k-2$라는 것을 의미하며, 따라서 $\delta(G) \leq f+k-2$이다. 이것은 $f+k \leq \delta(G)$라는 가정에 모순된다. 따라서 증명이 끝났다. ■

정리 1. G를 어떤 한계 $B \leq \delta(G)$에 대하여 $f+k \leq B$를 만족하는 임의의 $f \geq 0$, $k \geq 1$에 대하여 f-고장 비쌍형 다대다 k-DPC를 갖는 그래프라고 하자. 그러면, G에서 $f+k \leq B$를 만족하는 임의의 $f \geq 0$, $k \geq 1$에 대하여 f-고장 일반-요구 다대다 k-DPC를 설계할 수 있다.

증명. 초과 요구의 합 $D(G)$에 대한 수학적 귀납법으로 위의 알고리즘이 그래프에서 f-고장 일반-요구 다대다 k-DPC 문제를 $f'+k'=f+k$를 만족하는 어떤 f'와 k'에 대하여 f'-고장 비쌍형 다대다 k'-DPC 문제로 변환함을 보이면 충분하다. 보조 정리 2에 의하여, 경우 2(a), 2(b), 2(c) 중 최소한 하나는 적용 가능하다. 더구나 변환하는 동안 고장 요소의 수와 소스의 총 요구의 합은 변하지 않는다. 그러므로 f-고장 일반-요구 k-DPC는 초과 요구의 합이 더 작은 f-고장 일반-요구

k-DPC나 혹은 $f+1$-고장 일반-요구 $k-1$-DPC로부터 설계할 수 있고, 결국에는 $f'+k'=f+k$를 만족하는 어떤 f'와 k'에 대한 f'-고장 비쌍형 다대다 k'-DPC로부터 설계할 수 있다. ■

3. 단일-소스 DPC 문제의 변환

고장 집합 F를 가진 그래프 G에 $S=\{s\}$이고 $d(s)=k$인 단일-소스 k-DPC 문제가 주어져 있다. 이 절에서는 단일-소스 DPC 문제의 일대다 DPC 문제로의 변환을 논의하고, f-고장 일대다 k-DPC를 갖는 그래프에서, f-고장 단일-소스 k-DPC는 f-고장 일대다 k-DPC로부터 설계할 수 있음을 보인다.

그래프 G가, $f+k+1 \le |V(G)|$이고 $|F| \le f$을 만족하는 임의의 고장 집합 F에 대하여, $s \notin T$를 만족하는 임의의 소스 s와 k개 싱크들의 집합 T를 잇는 일대다 k-DPC를 가지면, *f-고장 일대다 k-DPC를 갖는 그래프 (f-fault one-to-many k-disjoint path coverable graph)*라고 부른다. 우선 f-고장 일대다 k-DPC를 갖는 그래프일 필요조건부터 고려한다.

정리 2. G가 f-고장 일대다 k-DPC를 갖는 그래프라면, $\kappa(G) \ge f+k$이다. 더구나 G가 $f+k+2$개 이상의 정점을 가지면, $\kappa(G) \ge f+k+1$이다.

증명. $\kappa(G) \le f+k-1$이라고 가정하자. 어떤 소스 s와 k개 싱크들의 집합 T가 존재하여, (G를 커버하는 것은 고사하고) s와 T를 잇는 일대다 유형의 k개 서로소인 경로도 존재하지 않음을 보인다. G가 완전 그래프와 동형이지 않음을 주장한다. 만약 그렇지 않다면, 정의에 의하여 $|V(G)| \ge f+k+1$이고 $\kappa(G) \ge f+k$가 되어 모순이다. 따라서 크기가 $f+k-1$ 이하인 정점 컷(vertex cut) C가 존재한다. $G \backslash C$에서 두 개의 서로 다른 연결 요소를 X, Y라고 두자. $C \subset F \cup T$, $s \in X$, $T \cap Y \neq \varnothing$인 경우에, s와 Y에 속한 한 싱크를 잇는 경로는 모두 C의 정점을 하나 이상 지나게 되어서, 고장 정점을 지나거나 혹은 다른 싱크를 지나게 되므로 모순이다. 따라서 $\kappa(G) \ge f+k$임은 증명되었다.

이제 $|V(G)| \ge f+k+2$라고 가정하자. 모순을 보이기 위하여, $\kappa(G) \le f+k$라고 가정한다. $\kappa(G)=f+k$이고 G는 완전 그래프가 아님을 알 수 있다. 따라서 G는 크기 $f+k$인 정점 컷을 가지고, $G \backslash C$는 최소한 두 개의 연결 요소를 가진다. s가 한 연결 요소에 포함되었다고 두고, 다른 연결 요소에 포함된 정점 하나를 x라고 둔다. $C=F \cup T$인 경우에, s와 한 싱크를 잇는 어떤 경로도 x를 지날 수 없다. 따라서 정리의 증명이 끝났다. ■

$D'(G)$를 모든 싱크의 초과 요구의 합 $\sum_{t_j \in T}\{d(t_j)-1\}$라고 두자. 2절에서 다룬 일반-요구 DPC 문제의 변환과 같은 방식으로, 단일-소스 DPC 문제를 싱크들의 초과 요구의 합이 더 작은 단일-소스 DPC 문제로 변환할 수 있다. 요구가 2 이상인 싱크 t_j에 대하여, t_j에 고장 아닌 에지를 통하여 인접하면서, 자유 정점이나 소스인 "어떤" 정점을 w라고 둔다. 만약 w가 자유 정점이면, 그것을 단위 요구를 가진 새로운 싱크라고 간주하고 t_j의 요구를 일만큼 감소시킨다. 그러고 나서 단일-소스 k-DPC를 찾고, 존재한다면, $s-w$ 경로를 ($s-w$ 경로,t_j)로 교체한다. w가 소스라면, (w,t_j)를 고장 에지라고 간주하고 $d(w)$와 $d(t_j)$를 각각 일만큼 감소시킨다. 그러고 나서 단일-소스 $k-1$-DPC를 찾고, 존재한다면, 경로 (w,t_j)를 $k-1$-DPC에 추가한다.

이제 G를 f-고장 일대다 k-DPC를 갖는 그래프라고 가정하고, f-고장 단일-소스 k-DPC 문제를 싱크들의 초과 요구의 합이 더 작은 f-고장 단일-소스 k-DPC 문제로 변환하고자 한다. 결국에는 f-고장 단일-소스 k-DPC를 f-고장 일대다 k-DPC로부터 얻게 된다. 우리 목적을 위해서는, 다음과 같이 요구가 2 이상엔 싱크에 고장이 아닌 에지를 통하여 인접한 임의의 자유 정점을 선택하고, 그것을 단위 요구를 가진 가상의 싱크라고 간주하면 충분하다.

단일-소스 DPC 문제에 대한 알고리즘

/* $|V(G)| \ge f+k+1$이고 $f+k \le \delta(G)$라고 가정한다. */

1. 만약 $D'(G)=0$이면, 일대다 k-DPC$[s,T|G,F]$를 찾고 서로소인 경로들의 집합 P를 되돌려 준다.
2. 그렇지 않으면, t_j를 요구가 2 이상인 싱크라고 하자. t_j에 고장이 아닌 에지를 통하여 인접한 임의의 자유 정점 w를 선택한다.
3. $d(t_j)$를 일만큼 감소시킨다. $T' := T \cup \{w\}$, $d(w) := 1$이라고 둔다. $P=k$-DPC$[s,T'|G,F]$를 찾은 다음 $P \cup \{(P_w,t_j)\} \setminus P_w$를 되돌려 준다. 여기서 P_w는 P에서 $s-w$ 경로이다.

정리 3. G를 f-고장 일대다 k-DPC를 갖는 그래프라고 하자. 그러면, f-고장 단일-소스 k-DPC는 f-고장 일대다 k-DPC로부터 설계할 수 있다.

증명. 먼저 요구가 2 이상인 싱크 t_j에 조건 $(t_j,w) \notin F$을 만족하는 자유 정점 w가 존재함을 주장한다. 모순을 유도하기 위하여, 그런 정점 w가 존재하지 않는다고, 즉 t_j에 인접한 어떤 정점 v도 (i) v는 터미널이거나, (ii) $v \in F$이거나, 혹은 (iii) $(t_j,v) \in F$라고 가정한다. t_j에 인접한 터미널의 개수는 기껏해야 (소스 하나와 $k-2$개의

싱크) $k-1$개이고, t_j에 인접하면서 조건 (ii)나 (iii)을 만족하는 정점 v의 개수는 기껏해야 f개이다. 따라서 t_j에 인접하면서 (i), (ii), 혹은 (iii)을 만족하는 정점의 총수는 $f+k-1$ 이하인데, 이 말은 $\delta(t_j) \le f+k-1$임을 의미한다. 이것은 필요조건 $f+k \le \delta(G)$에 모순이다. 따라서 주장이 증명되었다. 싱크들의 초과 요구의 합 $D'(G)$에 대한 수학적 귀납법으로 위의 알고리즘은 결국 f-고장 단일-소스 k-DPC 문제를 f-고장 일대다 k-DPC로 변환함을 어렵지 않게 보일 수 있다. ■

4. 결론

하이퍼큐브형 상호연결망의 한 부류인 제한된 HL-그래프에 대한 비쌍형 다대다 DPC에 대한 연구[10]에 따르면, m-차원 제한된 HL-그래프는 $f+k \le m-2$를 만족하는 임의의 f, $k \ge 1$에 대하여 f-고장 비쌍형 다대다 k-DPC를 가진다. 이 결과에 정리 1을 적용하면, m-차원 제한된 HL-그래프는 $f+k \le m-2$를 만족하는 임의의 $f \ge 0$, $k \ge 1$에 대하여 f-고장 일반-요구 다대다 k-DPC를 가진다는 결론에 도달한다. 비쌍형 다대다 k-DPC를 그래프의 크기에 대한 선형 시간에 구할 수 있으므로, 일반-요구 다대다 k-DPC도 선형 시간에 구할 수 있다. 재귀원형군, twisted cube, crossed cube 등 일부 하이퍼큐브형 상호연결망에 대한 일대다 DPC 연구가 [9]에 있는데, 정리 3에 의하여 분지수가 m인 이들 그래프에서 $f+k \le m-1$을 만족하는 임의의 $f \ge 0$, $k \ge 2$에 대하여 f-고장 단일-소스 k-DPC를 설계할 수 있다.

참고 문헌

[1] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory*, 2nd printing, Springer, 2008.

[2] C.-H. Chang, C.-K. Lin, H.-M. Huang, and L.-H. Hsu, "The super laceability of the hypercubes," *Inform. Proc. Lett.* 92(1), pp. 15-21, 2004.

[3] X.-B. Chen, "Many-to-many disjoint paths in faulty hypercubes," *Information Sciences* 179(18), pp. 3110-3115, 2009.

[4] X.-B. Chen, "Unpaired many-to-many vertex-disjoint path covers of a class of bipartite graphs," *Inform. Proc. Lett.* 110(6), pp. 203-205, 2010.

[5] T. Dvořák and P. Gregor, "Partitions of faulty hypercubes into paths with prescribed endvertices," *SIAM J. Discrete Mathematics* 22(4), pp. 1448-1461, 2008.

[6] P. Gregor and T. Dvořák, "Path partitions of hypercubes," *Inform. Proc. Lett.* 108(6), pp. 402-406, 2008.

[7] P.-L. Lai and H.-C. Hsu, "The two-equal-disjoint path cover problem of matching composition network," *Inform. Proc. Lett.* 107(1), pp. 18-23, 2008.

[8] J.-H. Park, "One-to-one disjoint path covers in recursive circulants," *Journal of KISS* 30(12), pp. 691-698, 2003.

[9] J.-H. Park, "One-to-many disjoint path covers in a graph with faulty elements," in *Proc. of the International Computing and Combinatorics Conference COCOON 2004*, pp. 392-401, Aug. 2004.

[10] J.-H. Park, "Unpaired many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks," *Journal of KISS* 33(10), pp. 789-796, 2006.

[11] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Fault-hamiltonicity of hypercube-like interconnection networks," in *Proc. IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium IPDPS 2005*, Denver, Apr. 2005.

[12] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks with faulty elements," *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems* 17(3), pp. 227-240, Mar. 2006.

[13] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in the presence of faulty elements," *IEEE Transactions on Computers* 58(4), pp. 528-540, Apr. 2009.

[14] J.-H. Park, H.-S. Lim, and H.-C. Kim, "Panconnectivity and pancyclicity of hypercube-like interconnection networks with faulty elements," *Theoretical Computer Science* 377(1-3), pp. 170-180, 2007.

[15] C.-H. Tsai, J.J.M. Tan, and L.-H. Hsu, "The super-connected property of recursive circulant graphs," *Inform. Proc. Lett.* 91(6), pp. 293-298, 2004.

[16] A.S. Vaidya, P.S.N. Rao, S.R. Shankar, "A class of hypercube-like networks," *Proc. 5th IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing(SPDP)*, pp. 800-803, 1993.