

# 외팔보형 나노 디바이스의 비선형 동적 모델링

## Nonlinear Dynamic Modeling For Cantilevered Nano-Devices

김일광\*·이수일†·강상욱\*\*  
 Il Kwang Kim, Soo Il Lee and Sang Wook Kang

### 1. 서론

탄소나노튜브(carbon nanotube: CNT)의 발견으로 그것의 우수한 기계적, 전기적 성질이 알려졌으며 이를 응용한 다양한 사례가 많은 논문을 통하여 활발히 보고되고 있다. 최근 탄소나노튜브 기반의 나노스위치(nano-switch)[1], 나노공진기(nano-resonator)[2]의 연구 결과가 있다.

본 연구에서는 단일벽 탄소나노튜브 기반의 외팔보 형태의 나노 디바이스를 설계하기 위한 이론 모델을 정립하고 그 특성을 해석하였다. 탄소나노튜브의 탄성력과 외력으로 작용하는 정전기력(electrostatic force), van der Waals 상호력(interactions)을 포함하였다. 그리고 다양한 전압의 조합으로 이론 모델의 주파수 응답(frequency response)을 얻어, 이 시스템의 안정성을 판별하고 특정 가진 주파수의 과도와 정상상태(transient and steady-state)에서의 시간 응답(time response)으로 비선형 동적 거동(nonlinear dynamic behavior)을 예측하였다.

### 2. 모델링 및 무차원 운동 방정식

외팔보로 가정한 단일벽 탄소나노튜브의 구조(structural) 및 관성 비선형성(inertia nonlinearity)까지 고려한 탄성력[3]과 외부에 작용하는 정전기력[1] 및 van der Waals 인력[1]의 관계식을 무차원화[3]하면 다음 식(1)과 같다.

$$\ddot{w} + w''' + c\dot{w} + \alpha_1[w'(w'w)'] + \alpha_1 \left[ w' \int_0^x \int_0^x \{ \ddot{w}'w' + (\dot{w}')^2 \} dx dx \right]' = \alpha_2 q_{elec} + \alpha_3 q_{vdw} \quad (1)$$

그 후, 1차 모드 갤러킨 근사화로 정리하면 다음 식(2)와 같다. 그 결과  $c = \beta^2 / Q$  ( $\beta = 1.8751$ , 외팔보),  $\alpha_1 = (g_0 / L)^2$ ,  $\alpha_2 = \pi \epsilon_0 V^2 L^4 / (g_0^2 EI)$ ,  $\alpha_3 = C_6 \sigma^2 \pi^2 L^4 / (2g_0^5 EI)$ 이다.

† 교신저자; 서울시립대학교 기계정보공학과  
 E-mail : leesooil@uos.ac.kr  
 Tel : (02) 2210-5667, Fax : (02) 2210-5575  
 \* 서울시립대학교 대학원 기계정보공학과  
 \*\* 한성대학교 기계시스템공학부

$$A\ddot{y} + c\dot{y} + By + C\alpha_1 y^3 + D\alpha_1 (y^2 \ddot{y} + y \dot{y}^2) = \alpha_2 \int_0^1 \frac{\phi(x)}{\sqrt{(1-\phi_1 y)(1-\phi_1 y + 2R)} \log^2 \left[ 1 + \frac{(1-\phi_1 y)}{R} + \sqrt{\frac{(1-\phi_1 y)(1-\phi_1 y + 2R)}{R^2}} \right]} dx + \alpha_3 \int_0^1 \phi(x) R \sqrt{(1-\phi_1 y)(1-\phi_1 y + 2R)} \times \frac{(8(1-\phi_1 y)^4 + 32(1-\phi_1 y)^3 R + 72(1-\phi_1 y)^2 R^2 + 80(1-\phi_1 y)R^3 + 35R^4)}{(1-\phi_1 y)^5 (1-\phi_1 y + 2R)^5} dx$$

$$A = \int_0^1 \phi(x)^2 dx = 1, \quad B = \int_0^1 \phi(x) \phi'''(x) dx, \quad c = \frac{\beta^2}{Q} \int_0^1 \phi(x)^2 dx = \frac{\beta^2}{Q}$$

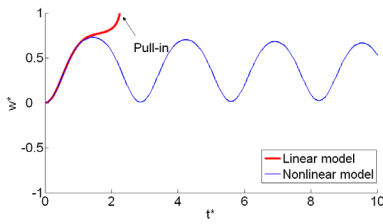
$$C = \int_0^1 [\phi(x) \phi''(x)^3 + 4\phi(x) \phi'(x) \phi''(x) \phi'''(x) + \phi(x) \phi'(x)^2 \phi''''(x)] dx$$

$$D = \int_0^1 \phi(x) \beta_1 dx \quad \left( \beta_1 = \left[ \phi'(x) \int_0^x \int_0^x \phi'(x)^2 dx dx \right] \right) \quad (2)$$

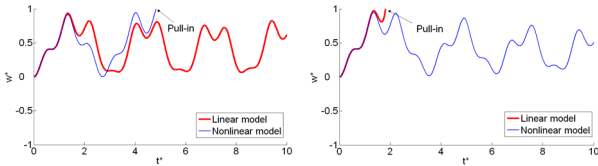
### 3. 해석 결과

DC 혹은 AC 전압만을 주었을 때의 선형과 비선형 빔 모델 끝 단의 초기 시간 응답을 비교하였다(Fig. 1). Fig. 1(a)와 같이 동일한 DC 조건 상에서 선형 외팔보 모델이 이미 pull-in 한 반면, Fig. 1(b)의 경우 AC에 따라 비선형 외팔보 모델이 pull-in 하는 현상을 보였다. 이는 외팔보의 구조 및 관성 비선형 효과가 서로 다른 pull-in 거동에 영향을 미치는 것을 예상할 수 있으며 실제 디바이스를 설계하는데 무시할 수 없음을 보여준다.

같은 AC 전압과 무차원 주파수의 동일한 조건으로 DC 전압의 변화에 따른 응답을 비교하였다. Fig. 2(a)는  $V_{dc} = 0$  일 때의 기초(fundamental)주파수의 절반에 해당하는 저주파(sub-harmonic frequency) 응답을 보이며, Fig. 2(b)처럼  $V_{dc} = 0.15V$  일 때는 기초주파수 응답까지 보인다. Fig. 2(c)와 같이  $V_{dc} = 1V$ 로 증가할 경우 전체적으로 주파수 연화(softening) 효과가 나타나며, 특히 기초주파수 영역에서 saddle node 분기(bifurcation)와 기초주파수의 약 2 배에 해당하는 period doubling 분기도 발생한다. 여기서 점선은 불안정한 영역으로 이 구간 내의 주파수로 가진 할 경우, 초기 조건에 따라 그 응답이 발산하는 불안정한 거동을 보일 수 있다[2].

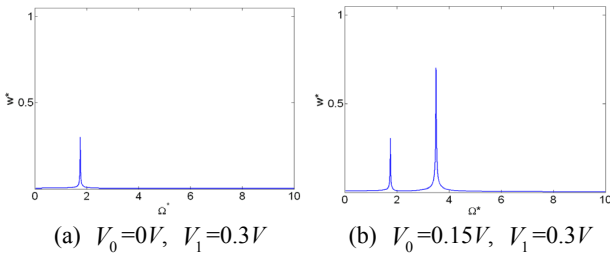


(a)  $V_{dc} = 2.277V$ ,  $V_{ac} = 0$



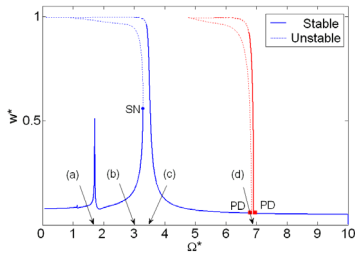
(b)  $V_{dc} = 0$ ,  $V_{ac} = 3.425V$  or  $3.44V$ ,  $\Omega^* = 3.516$

**Fig. 1** The dynamic response of normalized deflection in the cantilevered CNT with various applied ac/dc voltage in the linear and nonlinear model ( $Q = 150$ )



(a)  $V_0 = 0V$ ,  $V_1 = 0.3V$

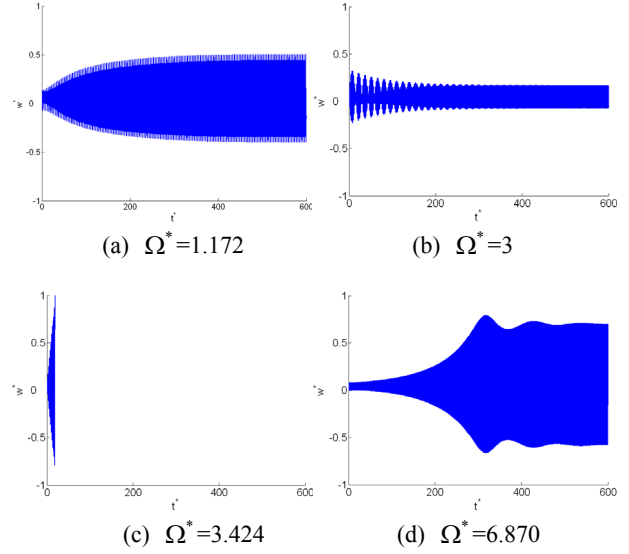
(b)  $V_0 = 0.15V$ ,  $V_1 = 0.3V$



(c)  $V_0 = 1V$ ,  $V_1 = 0.3V$

**Fig. 2** The frequency responses with variant dc load on  $V_{ac} = 0.3V$  and  $Q = 150$

앞서 예측한 주파수 응답 특성을 바탕으로 안정/불안정 영역의 주파수로 가진 하였을 경우의 과도 및 정상상태의 시간 응답을 비교하였다. Fig. 3(a)는 저주파에 해당하는 무차원 주파수로 가진 할 경우 정상상태에서는 주파수 응답의 진폭에 수렴하는 것을 알 수 있다. 그리고 Fig. 3(b)와 Fig. 3(c)의 기초주파수 부근의 시간 응답을 비교하면 안정상태로 수렴하는 경우와 불안정한 상태로 발산하여 pull-in 하는



**Fig. 3** The time responses with various excited frequency on  $V_{dc} = 1V$ ,  $V_{ac} = 0.3V$  and  $Q = 150$

경우를 볼 수 있다. 마지막으로 Fig. 3(d)는 기초주파수의 약 2 배에 해당하는 무차원 주파수로 가진할 때 과도상태에서는 발산하다가 정상상태 도달할수록 주파수 응답에 해당하는 진폭만큼 수렴함을 보여준다. 덧붙여, Fig. 2(c)의 불안정 영역에 해당하는 무차원 주파수와 다양한 초기 조건을 적용하여 그 응답을 예측하면 모두 발산함을 확인하였다.

#### 4. 결론

본 연구 결과 선형/비선형 외팔보 모델의 서로 다른 응답으로부터 탄소나노튜브의 구조 및 관성 비선형성을 무시할 수 없다. 또한 다양한 주파수 응답과 시간 응답으로부터 실제 탄소나노튜브를 응용한 외팔보 기반의 나노 디바이스를 설계할 때 도움을 줄 것이다.

#### 후 기

본 연구는 서울시 산학연 협력사업(10890)의 지원으로 이루어졌음

#### 참 고 문 헌

- (1) Dequesnes, M., Rotkin, S. V., and Aluru, N. R., 2002, "Calculation of Pull-In Voltages for Carbon-Nanotube-Based Nanoelectromechanical Switches," *Nanotechnology*, Vol. 13, pp. 120-131.
- (2) Ouakad, H. M., and Younis, M. I., 2010, "Nonlinear Dynamics Actuated Carbon Nanotube Resonators," *ASME J. Comput. Nonlinear Dynam.*, Vol. 5, pp. 011009-1-13
- (3) 김일광, 이수일, 강상욱, 2009. "탄소나노튜브 디바이스의 전기역학적 비선형 거동 해석," 한국소음진동공학회 2009년 추계학술대회논문집, pp. 467-471.