한국소음진동공학회 창립 20주년 기념 2010년 춘계학술대회논문집, pp.357~358

부분적으로 유체가 채워진 고정-자유단을 갖는 사각형 탱크의 고유진동 해석

Free Vibration Analysis of a Partially Liquid–filled Rectangular Tank with a Clamped–Free Boundary Condition

정경훈† ·박진석*·이원재**
Kyeong-Hoon Jeong, Jin-Seok Park and Won-Jae Lee

1. 서론

유체와 접하는 단일 사각평판 또는 이중평판의 고유진동 해석에 대한 연구는 최근까지 몇몇 연구자들이 수행했다. 그리고 지금까지 사각형으로 이루어진 탱크에 유체가 부분적으로 채워진 경우에 대한 동특성 연구가 수행되었지만 유체에 대한 기술이 너무 복잡하고 적절하지 못한 수식 전개가 있었다. 따라서 본 논문은 사각탱크 내부에 유체가 부분적으로 채워진 경우에 대하여 고유진동 해석이론을 유도하고 유한요소 해석으로 이론을 검증하고자 한다.

2. 이론전개

2.1 공기중 고유진동수

Fig. 1은 유체가 부분적으로 채워 있으며 하단이 고정되고 상단이 자유 경계조건을 갖는 사각탱크의 형상을 보여주고 있다. 사각탱크는 사각평판으로 모사하고 사각탱크의 모서리는 단순지지된 평판으로 간주할 수 있다. 부분적으로 유체와 접하는 사각형 탱크의 동적 변위인 $w(x,y,t)$ 는 공기중 변위 $W_{mn}(x,y)$ 과 미정계수 $q_{(m,n)}$의 조합으로 나타낼 수 있다.

$$w(\xi,z,t)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} q_{mn}\, W_{mn}(\xi,z)\exp(\mathrm{i}\,\omega t) \tag{1}$$

그리고 공기중 사각평판의 변위는 허용함수인 직교다항식의 곱으로 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$W_{mn}(\xi,z)=H_m(\xi)\,F_n(z) \tag{2}$$

적용하는 직교다항식은 사각탱크의 경계조건을 만족하는 허용함수를 Gram- Schmidt process로부터 유도한다. 미정계수 q_{mn}을 식(3)과 같이 벡터로 나타낼 때, 사각평판의 기준운동에너지 T^*는 식(4)로 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{q}=\{\, q_{11}\ q_{12}\cdots q_{1N}\ q_{21}\ q_{22}\cdots q_{MN}\,\}^T , \tag{3}$$

$$T^*=\frac{\rho h}{2}\,\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{q}\cdot \tag{4}$$

여기서 ρ는 사각탱크의 밀도를 나타내며, 식(4)의 행렬 $\boldsymbol{Z}$는 식(5)로 나타난다.

$$Z=\int_0^b\int_0^a W_{mn}\,W_{lk}\,dx\,dy\cdot \tag{5}$$

사각탱크의 최대변형에너지는 식(6)으로 나타난다.

$$\begin{aligned}V=\frac{D}{2}\int_0^b\int_0^a\Bigg[&\left\{\frac{\partial^2W_{mn}}{\partial x^2}\frac{\partial^2W_{jk}}{\partial x^2}\right\}+\left\{\frac{\partial^2W_{mn}}{\partial y^2}\frac{\partial^2W_{jk}}{\partial y^2}\right\}\\&+\mu\left\{\frac{\partial^2W_{mn}}{\partial x^2}\frac{\partial^2W_{jk}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2W_{jk}}{\partial x^2}\frac{\partial^2W_{mn}}{\partial y^2}\right\}\\&+2(1-\mu)\left\{\frac{\partial^2W_{mn}}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2W_{jk}}{\partial x\partial y}\right\}\Bigg]dx\,dy\cdot\end{aligned} \tag{6}$$

여기서 사각탱크의 강성도는 $D=Eh^3/12\,(1-\mu^2)$ 이고, 와 E는 탱크의 Poisson비와 탄성계수를 나타낸다. 그리고 식(6)에 식(1)과 (2)를 대입하면 식(7)을 얻는다.

$$V=\frac{D}{2}\,\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{q}\cdot \tag{7}$$

식(7)의 행렬 $\boldsymbol{U}$는 식(6)에 따라 각각의 허용함수를 미분하고 구간별 적분을 통해서 구해진다. 따라서 식(8)로부터 공기중 사각탱크의 고유진동수와 모드형상을 얻는다.

$$D\,\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{q}-\omega^2\rho\,h\,\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}\cdot \tag{8}$$

2.2 유체의 변위포텐셜

이상유체의 Laplace 방정식과 경계조건을 만족하는 변위포텐셜은 식(9)의 형태로 나타난다.

† 정경훈; 한국원자력연구원
E-mail : khjeong@kaeri.re.kr
Tel : (042) 868-8792
* 한국원자력연구원
** 한국원자력연구원

$$\phi(x,y,z)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\left[R_{rs}\cosh\left(\alpha_{rs}\,x\right)\cos\left(\beta_s\,y\right)\right.$$
$$\left.+G_{rs}\cos\left(\tau_s\,x\right)\cosh\left(\sigma_{rs}\,y\right)\right]\cos\left(\lambda_r\,z\right) \qquad (9)$$

유체와 접하는 사각탱크의 변위는 접하는 유체의 수직방향 변위와 동일해야 하는 조건을 적용하고 유한 푸리에 변환을 하면 유체의 미정계수를 구할 수 있다.

2.3 접수 사각탱크의 고유진동수

유체의 기준 운동에너지는 식(10)과 같이 적분을 통해서 구할 수 있다. 여기서 ρ_o 는 유체의 밀도를 나타낸다.

$$T_o^*=\frac{\rho_o}{2}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{v=1}^{N}q_{mn}\,q_{uv}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{\chi_{urs}\,(-1)^{s+1}}{\sinh\left(\alpha_{rs}\,b/2\right)}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\Omega_{us}}{\tanh\left(\alpha_{rs}\,b/2\right)}\right\}+\frac{\Gamma_{ms}}{\sigma_{rs}\,D_s}\left\{\frac{\Gamma_{us}}{\tanh\left(\sigma_{rs}\,c/2\right)}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\theta_{urs}\,(-1)^{s+1}}{\sinh\left(\sigma_{rs}\,c/2\right)}\right\}\right]\frac{\Lambda_{nr}\,\Lambda_{vr}}{J_r}=\rho_o\,\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{q}\,. \qquad (10)$$

2.1절과 동일한 Rayleigh−Ritz 방법으로 식(11)을 얻게 되며, 식(11)로부터 접수 사각탱크의 고유진동수와 모드형상을 구할 수 있다.

$$D\,\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{q}-\omega^2\left\{\rho\,h\,\boldsymbol{Z}+\rho_o\,\boldsymbol{G}\right\}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}\,. \qquad (11)$$

3. 계산예 및 고찰

3.1 유한요소 해석모델

고정-자유단을 갖는 사각탱크에 부분적으로 유체가 채워진 구조물의 고유진동수와 모드형상을 식(11)의 행렬식으로부터 구할 수 있다. 제시된 이론적인 해석방법의 타당성을 확인하기 위하여 상용 유한요소 해석 코드인 ANSYS (release 10)를 이용하여 3 차원 유한요소 해석모델을 만들었다. 해석에 사용된 사각탱크의 크기는 가로 300 mm, 세로 240 mm, 높이 360 mm 이며 두께는 3 mm 다. 계산에 사용된 물성치는 사각탱크의 탄성계수 = 69.0 GPa, Poisson 비 = 0.3, 밀도 = 2700 kg/m^3 이다. 그리고 유체의 밀도는 1000 kg/m^3 이다. 사각평판의 상부 가장자리는 자유단을 갖고 하부 가장자리는 고정되었다고 가정하였다.

3.2 이론의 검증 및 결과

50% 수위의 유체로 채워진 사각탱크의 이론해석 및 상용 ANSYS Code 를 이용한 유한요소해석 결과가 Table 1 에 나타나 있다. 이론계산을 수행할 때 상용 소프트웨어인 Math-CAD (2000 년판)을 사용하여 이론값의 고유진동수를 구하였다. Table 1 에 나타난 바와 같이 8 개의 저차 모드 고유진동수를 비교한 결과, 이론치와 유한요소해석 결과가 2% 오차범위 이내에서 일치하고 있음을 확인할 수 있었다.

4. 결론

본 논문은 유체가 부분적으로 채워진 사각탱크에 대하여 고유진동수를 구하는 해석방법을 제시하였다. 이 해석방법의 타당성을 확인하기 위하여 고유진동수를 이론적으로 구하고 상용 컴퓨터 코드로 검증하였다. 계산결과를 통해서 이론값의 고유진동수와 유한요소 해석결과로 얻은 고유진동수가 매우 잘 일치하고 있음을 확인하였다.

Table 1 Natural frequencies (Hz) of the wet tank filled with water

Mode No.	Natural frequency		Discrepancy (%)
	Theory	ANSYS	
1	84.2	82.8	1.66
2	99.1	98.2	0.91
3	111.7	111.5	0.18
4	127.5	125.1	1.88
5	146.9	145.7	0.82
6	159.5	160.4	–0.56
7	202.6	202.4	0.10
8	227.0	231.4	–1.94

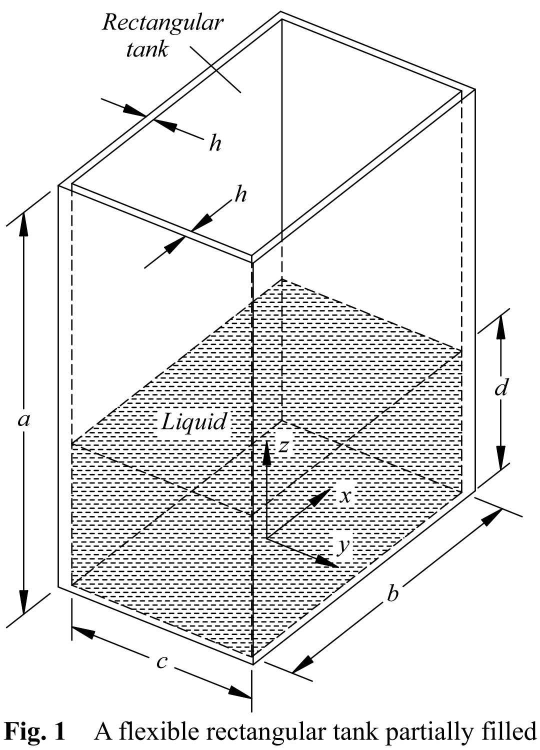

Fig. 1 A flexible rectangular tank partially filled with a liquid.