초등학교 6학년 수학영재들의 기호감각 분석

조 수 경(인천당하초등학교)
송 상 헌(경인교육대학교)

Ⅰ. 서 론

NCTM(1989)에서는 각종 정보를 종합적으로 인지한 것에 대해 갖게 되는 여러 가지 감각의 중요성을 언급하고 있다. 그로 인해 많은 학생들이 오랜 기간의 대수 교육 이후에도 어려워하는 변수 도입, 연산, 기호의 다양한 의미, 수학적 용어의 도입, 대수적 개념의 이해 등의 감각을 도와줄 수 있는 수학적 직관이 필요하다.
기호감각은 전-기호개념을 의미할 뿐만이 아니라, 수학 문제를 해결할 때에 필요한 필수요소로서, 다양한 기호를 바라보는 직관적인 느낌 즉, 직관력을 뜻한다. 이러한 기호에 대한 직관력은 다양한 문제 해결책을 제시하며, 불확실성을 가지고 있으나 의미를 수반하고, 사고과정에서 규칙을 만드는 특성이 있다. 대수교육에서 직관적 성격인 기호감각을 가지는 것은 필수적이다.

이 연구는 기호감각의 특징과 요소를 바탕으로 전대수 단계에 있는 우리나라 초등학교 6학년 수학 영재들이 보여주는 기호감각에 대한 인식과 이해 정도를 살펴보면서 그들이 실제로 기호를 표현하는 과정을 분석하여 대수학습을 돕는 기호감각의 학습 방안에 대한 시사점을 얻는 데 목적이 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 기호감각의 의미와 특징

기호감각의 의미에 대해 Rey(1992)는 '수감각[9]의 논리적 확장'이라고 포괄적으로 말한 반면, Arcavi(1994)는 '기호의 의미에 의해서 자극된 특별한 수학적 능력이고, 기호의 힘을 평가하고 통합하는 능력'이라고 말하였다. 또한 Kinzel (2001)은 '기호의 인식과 기호의 해석 연산하는 기술의 통합'이라고 보았고 Zorn (2001)는 '수학적 의미를 추출하고 기호를 구성하는 매우 일반적인 능력'이라고 포괄적으로 설명한 후 '기호를 의미화하고, 수학적 의미나 구조를 효과적으로 발견하기 위해 기호를 조작하는 능력'이라고 구체적으로 정의하였다. (Zehavi, 2004 : 184에서 재인용).

9) Rey(1992)가 말하는 수감각은 수의 다양한 사용 및 해석에 대한 직관적인 느낌, 다양한 형태의 수를 이해하는 능력, 계산상의 오류를 바로 잡는 능력, 수를 사용하는 상식적인 접근과 관련이 있다. 수감각은 학생이 수감각을 가지고 있다거나 가지고 있지 않다고 단순하게 말할 수 있는 것이 아니며, 가르치다가 그만둘 수 있는 단원도 아니다. 또한 수감각은 우연히 계발되는 것도 아니고, 수를 조작한다고 해서 수감각이 형성된다고 볼 수도 없다. 수감각은 수와 관련된 상황을 이해하고자 하는 욕구로써 수학 교수-학습의 모든 측면에 침투하고 있는 사고방식이다.

Fey(1990)는 수학 환경의 변화로 인해 새로운 자료와 통찰력의 필요성에 대해 언급하면서 기호감각을 예로 들어 설명하였다. 하지만 기호감각이 문제 상황에서 수감각, 함수감각, 그래프감각 등과 같은 다른 감각들과 상호 작용하기 때문에 그 의미에 대해 명확히 정의하지는 않았다. 대신 기호감각이 '수학 교수를 위한 목표의 합리적 준비'라고 언급하면서 다음의 기본적인 주제들이 포함된다고 하였다.

- 일련된 수나 혹은 그림 표현에서 패턴을 대략적으로 예상하게 하는 대수 표현을 인식하는 능력
- n, n^2, ...,n^k에서 크기의 비교를 통해 정보를 만들어가는 능력
- 함수 값을 나타낸 표, 그래프, 진술된 조건들의 해석 등을 예상하는 능력과, 적절한 패턴을 보고 대수 규칙을 이끌어내는 능력
- 산술적 추정을 통해 대수 조작을 살펴보고 결과의 형태를 예측하며 또한 결과를 살펴보고 답이 맞는지 판단하는 능력
- 비슷한 답 중 가장 적절한 것을 결정하는 능력

이러한 Fey(1990)의 기호감각에 대한 주제들은 주로 기호표현이나 그래프와 표를 보고 그 결과의 형태를 예측하거나 판단하는 능력을 강조하고 있다.
Arcavi(1994)는 기호감각을 '기호에 대한 복잡하고도 다면적인 감각 혹은 기호에 대한 빠르고 정확한 인지, 이해, 본능'이라고 추상적으로 정의하면서 기호감각은 다음과 같은 것들을 포함한다고 하였다.

- 기호의 힘을 위한 심미적인 감각과 이해
- 불확실한 것을 일반화하고 증명하고 관계를 보여주기 위해 기호를 사용하는 방법과 시기를 이해하는 것
- 문제를 풀면서 더 쉬운 방법을 찾거나 더 우아한 풀이 관계를 찾기 위해서, 혹은 다른 문제 풀이 접근을 위해 기존의 기호를 버리는 감각
- 대수 문제를 풀기 위해 기호 표현을 읽고, 조작하는 능력
- 문제를 푸는 과정에서 필요한 말이나 그래프로 정보 표현하여 기호 관계를 성공적으로 수행하는 인식
- 문제에서 기호 표현을 선택하는 능력: 이러한 선택은 문제 해결과정에서 성취의욕을 고취시키고, 그 의미를 알게 하고, 기호의 선택을 신중하게 하며 더 나은 기호를 찾기 위한 필요성 및 방향성을 키우는 능력
- 문제를 푸는 동안 기호의 의미를 점검하는 것과 본인의 직관에 근거한 기호의 의미 혹은 문제의 결과를 예상하는 데 비교하고 대조하는 능력
- 다른 맥락에서는 기호가 다른 역할들을 수행할 수 있다는 것을 인식하는 것

위에서 Arcavi는 기호감각을 광범위하게 해석하고 있으며, 여러 학자들 중 가장 다양한 요소들을 언급한다. 그는 문제를 대수로 공식화하고 공식화된 문제를 풀고 다시 기존 문제의 관점에서 결과를 재해석할 때 기호의 의미 에 대한 이해를 강조한다. 특히 위의 여러 구성 요소 중 다른 학자들에게서는 찾아볼 수 없는 '다른 맥락에서 기호의 다른 역할'을 언급하면서, 기호의 역할 인식을 통해 직관적인 감각의 발달이 이루어진다고 보고 있다.

Driscoll(1999)은 Arcavi와 Fey의 연구를 토대로 기호감각의 구성요소를 다음과 같이 정리하였다.

- ･기호가 필요할 때와 불필요할 때를 아는 것
- ･기호의 의미를 해석할 수 있는 것
  - ･대수적 조작을 점검하는 능력과 결과의 형태 예측하는 것
  - ･일련의 수, 표, 그래프를 보고 대수 기호 표현이나 패턴을 추측하는 것
  - ･위의 과정과는 반대로 대수 기호 표현을 보고 표, 그래프, 언어로 표현하는 방법을 아는 것

위에서 Driscoll의 기호감각에 대한 구성요소는 Arcavi의 그것과 비슷하며, Fey가 언급한 기호표현이나 그래프와 표를 보고 그 결과의 형태를 예측하거나 판단하는 능력을 포함하고 있다.

Pierce(2002)는 기호의 힘과 유용성을 위해 감각의 의미를 반영하여 인지적인 능력보다 넓은 개념으로 기호감각의 특징을 밝히고 있다.

- ･관계를 표현하기 위하여 기호를 이용하는 능력
  - ･기호가 언제 사용될 지, 다른 방법으로 접근해야 할지에 대한 감각
  - ･기호연산이 문제를 해결할 수 있도록 그 과정을 돕는 감각
  - ･동등한 기호 표현을 인식하는 능력
  - ･주어진 문제 상황이나 그 이상에서 기호의 의미를 해석하는 능력

이상의 여러 학자들의 의견을 종합해볼 때, 기호감각은 ‘기호를 바라보는 빠르고 정확한 인지와 본질적 이해’라는 포괄적 의미에 더하여 본 연구에서는 구체적으로 ‘기호의 의미를 파악하고 문제 상황이나 문제 풀이 과정 안에서 기호를 다룰 줄 아는 감각과 능력’이라고 말할 수 있다.

2. 학교수학에 필요한 기호감각의 요소

이제 기호감각의 여러 가지 요소들 중에서 학교교육에 필요한 5가지 요소에 대해서 좀 더 자세히 살펴보고자 한다.

가. 기호 도입의 필요성을 인식하기

NCTM(2000)은 K-12학년을 위한 대수 규준으로 학생들이 규칙성, 관계, 함수를 이해하는 것과 더불어 대수 기호를 사용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석하는 것을 제시하고 있다. 특히 NCTM(2000)은 대수 기호를 사용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석하기 위해서 6-8학년의 모든 학생들은 변수의 서로 다른 사용에 대한 개념적 이해를 발달시켜야 하고, 상황을 표현하고 문제를 해결하기 위해 기호대수를 사용해야 한다고 제시하고 있다.
그러나 기호대수를 사용하는 것도 중요하지만 학교수학에서는 미지수나 변수로서의 기호 도입의 필요성을 느낀 후에 기호를 도입해야 한다. Arcavi(1994)와 Driscoll(1999)도 기호감각의 첫 번째 구성요소를 기호의 힘을 위한 심미적인 감각과 이해, 기호가 필요할 때와 불필요할 때를 아는 것이라고 하였다. 이러한 기호 도입의 필요성을 인식한 후에 학생들은 대수

적 사고에 대한 직관의 기초를 구성하거나 새로운 기호 체계에 대한 의미 구성과 기호에 대한 연산을 수행해야 한다. 기호의 사용여부에 따라 학생들이 자신의 수학적 주장을 표현할 수도 있고, 표현하지 못할 수도 있다는 사실을 깨달을 수 있도록 기회를 주어야 한다. 이미 기호를 사용할지라도 혹은 그 연산방법을 알았을지라도, 학생들은 기호 도입의 필요성을 인식한 후에 기호의 힘과 유용성을 깨닫게 될 것이다.

2) 기호의 의미 읽기

역사 발생적으로 대수적 사고가 언어단계에서 시작하여 생략적, 기호적 대수 단계로 발전되었음을 생각할 때 언어로 기호의 의미를 정리하게 하는 방법은 학생들에게 일어날 수 있는 대수적 사고 단계를 언어적, 생략적 측면에서부터 시작하여 기호적 단계로 사고를 정립시킬 수 있다.

Heid et al.(1995)는 기호조작도구(symbolic manipulation tools)는 학생들이 정형적인 기호조작 절차의 습득에 초점을 두는 대신 기호가 의미하는 것이 무엇인지에 초점을 두게 하여 기호감각의 발달을 촉진시키고, 전체적인 절차와 기호조작을 다루는 원리에 집중할 수 있게 해줄 뿐만 아니라 문자식에서 규칙성을 탐구할 수 있는 기회를 제공해준다고 하였다.

Arcavi(1994)는 기호감각의 구성 요소 중 기호의 의미 읽기를 언급하면서 문제를 대수로 공식화하고, 공식화된 문제를 풀고 다시 원래 문제의 관점에서 결과를 재해석할 때 기호의 의미 이해를 강조하였다. 또한 기호표현을 읽고 그 의미를 파악하는 과정을 통해 연산을 빠르게 할 수 있고, 기호를 신중하게 선택할 수 있다고 한다.

학교수학에서 기호의 기계적인 연산에 앞서 그 기호를 바라보는 관점의 전환, 즉 기호의 의미 읽기를 통해 지금 내가 하는 것이 무엇인지를 인식하는 것이 필요하다.

3) 맥락에 적합한 기호를 선택하기

Arcavi(1994)는 문제에서 기호 표현을 선택하는 능력을 기호감각의 한 구성요소라고 하였다. 적합한 기호의 선택은 문제 해결과정에서 성취 의욕을 고취시키고, 기호의 의미를 알게 하며 기호 선택을 신중하게 한다. 또한 더 나은 기호를 찾기 위한 필요성 및 방향성을 키울 수 있다고 하였다.

학교수학은 맥락과 상황을 강조한다. 그 맥락과 상황에 적합한 기호의 선택은 문제를 푸는 과정이나 결과를 반성하는 과정에서 기호의 의미를 점검할 필요성을 깨닫게 해준다. 더 나은 기호를 선택하는 능력과 선택한 기호를 점검하는 능력은 학교수학에서 문제를 해결하는 과정에서 반성적 사고를 가능하게 해준다.

4) 기호의 시각화를 통한 패턴 추측하기

장혜원(1996)은 표현의 측면에서 시각적 표현을 언어적 표현과 대등하게 다룰 것을 제안하였다. 알고리즘 이면의 의미를 생각하기 위해서는 반성적 사고가 요구되는 경우가 대부분인데 학생들은 이를 생각하기 귀찮게 여기고 의미에 대한 반성없이 알고 있는 기호 규칙에 따라 무의식적으로 식을 조작하는 경향이 있다는 것이다.

Driscoll(1999)은 그림과 기호 간의 상호작용을 통해, 기호의 형식적 조작이 아닌 기호의 의미에 기초한 조작을 가능하게 하고, 수학의 지나친 알고리즘화를 방지하여 기호에 대한 의미 충실한 이해를 돕는다고 한다.

학교수학에서 산술에서 대수로의 이행을 자연스럽게 하기 위해서는 학생들에게 기호 문자가

아닌 시각적인 기호와 함께 문제를 해결할 수 있는 기회를 주어야 한다. 때로는 기호 문자보다 그림을 사용하는 것이 더 자연스럽다. 이는 지식의 발달에 있어 이행의 중요성을 강조한 Bruner의 EIS 이론과도 부합한다고 할 수 있다.

5) 다른 맥락에서 기호의 역할 인식하기

Kieran(1992)은 산술과 대수에서 여러 가지 기호나 부호를 공유하고 있어 산술과 대수 사이에는 연속성이 있는 것 같지만 이러한 기호나 부호에 주어지는 해석이 산술과 대수에서는 다르게 나타난다고 하였다. 학생들은 산술에서 경험한 능력과 산술에서 획득한 개념을 그대로 대수학습에 가져오게 된다. 그러나 이런 개념은 대수에서 요구하는 조건에 대처하기 위해 확장되거나 수정되어야 한다(송영무・양두례, 1996 : 42).

즉, 초등학교 산술에서 학습했던 방법이나 기호들을 그대로 사용해서 표현할 수 없는 측면이 대수에 존재한다. 이런 상황을 잘 이해하지 못한 상태에서 학생들은 당황하게 되고 이것은 대수학습을 하는 학생들에게 장애를 유발시키기도 한다.

이에 Arcavi(1994)는 기호감각의 구성 요소 중 다른 학자들에게서는 찾아볼 수 없는 ‘다른 맥락에서 기호의 다른 역할’을 언급하면서, 기호의 역할 인식을 통해 직관적인 감각의 발달이 이루어진다고 보고 있다.

3. 기호감각의 지도방법

장혜원(1997)은 표현의 측면에서 수학적 기호의 측면과 시각적 표현과 언어적 표현과 대등하게 다루어야 한다고 하였다. 수학의 언어는 많은 수학 기호를 포함하여 시각적・언어적 표현으로 나타난다. 특히 학교수학에서는 기호의 사용과 그 조작으로 인한 알고리즘화는 수학의 중요한 특징이지만, 그 이면에 있는 수학적 의미의 이해도 중요하다. 알고리즘 이면의 의미를 생각하기 위해서는 반성적 사고가 요구된다. 수학 기호만의 조작인 방정식, 함수식 등에서의 식 변형 능력의 강조보다는 문장제에서 언어적 표현을 식이나 그림으로 번역해야 하는 과제의 성취도에 중점을 두어야 한다. 수학 기호의 형식적 조작이 아닌 기호의 의미에 기초한 조작을 통해 수학의 지나친 알고리즘화를 방지하고 의미충실한 이해에 주목해야 한다.

기호감각을 가르치는 것은 수학 교수-학습 방법에 대한 접근의 변화라고 볼 수 있다. 즉 규칙의 기계적인 적용보다는 기호의 의미파악에 초점을 두어야 한다.

Ⅲ. 연구의 방법

1. 연구의 과제

본 연구에서 사용한 검사 도구인 ‘기호감각 검사지’는 Arcavi(1994)와 Driscoll(1999)이 제시한 문항을 그대로 번역하거나 초등 수학 영재의 수준에 맞게 약간 수정・보완한 것이다. 검사 문항의 구성은 <표 1>과 같으며 실제 검사지는 <부록>에 실었다.

〈표 Ⅲ-1〉 기호감각 검사 문항 분석

번호	문항	기호감각요소	출처
1	사각형의 둘레	기호 도입의 필요성 인식	Arcavi(1994), p.25 변형
2	연속된 세수의 곱	기호의 의미 읽기	Arcavi(1994), p.27 번역
3	연속된 세수의 합	맥락에 적합한 기호 선택	Driscoll(1999)p.123 번역
4	탑의 변형	기호의 시각화를 통한 패턴 추측	Driscoll(1999) p.137
5	$3m$의 의미	다른 맥락에서 기호의 역할 인식	Arcavi(1994), p.34 변형

검사지의 문항은 총 5문항으로 학교수학에서 필요한 기호감각의 5가지 구성요소(기호 도입의 필요성 인식, 기호의 의미 읽기, 맥락에 적합한 기호 선택, 기호의 시각화를 통한 패턴 추측, 다른 맥락에서 기호의 역할)를 각각 검사할 수 있는 문항이다. 생각의 변화를 파악하기 위해 답의 풀이과정을 모두 기록하도록 하였고 틀린 것이라도 지우지 않도록 요구하였으며, 자신이 푼 방법에 대한 설명도 기록하도록 하였다. 검사지는 예비검사를 통해 문항 진술상의 문제점, 난이도 조정 등을 거친 후 총 4단계에 걸쳐 적용하였다.

문항 [I]은 정사각형의 한 변의 길이를 문자로 표현하여 식을 쓰게 하는 문제로, 문제에 한 변의 길이를 x로 제시하지 않은 것은 학생들에게 기호 선택의 여지를 남기기 위한 것이다. 기존의 수학교과에서는 획일적으로 미지수에 대해 그 값을 시각적 기호 □로 제시하거나, 문자 기호 x를 사용하도록 유도하고 있고, 이로 인해 학생들은 '문자 기호 선택의 필요성'이나 '문자 기호 선택의 자유성'을 인식하지 못하는 경우가 발생한다.
이 문제를 통해 정해지지 않은 값에 대해 기호 도입의 필요성을 느끼고 있는지, 또한 문제해결을 위한 표현이 문제 속의 용어를 사용하여 진술했는지, 해결 전략이 시각적 기호에 머무르는지 혹은 문자 기호에 다다랐는지 등의 기호에 대한 수준을 판단할 수 있다.
서로 다른 양에 대한 다른 기호 도입의 필요성에 대한 인식과 다른 기호의 역할에 대한 인식이 이루어지에 대한 문항으로 이루어져있다.

문항 [Ⅱ]은 기계적인 계산보다는 지금 내가 하는 것이 무엇인가에 대해 기호의 의미 밑에 숨겨진 뜻을 찾는 과정의 유무를 묻는 문항이다. 대수에서 기호의 기계적인 연산에 앞서 기호를 바라보는 관점의 전환, 즉 기호의 의미 읽기를 통해 지금 내가 하는 것이 무엇인지에 대한 인식이 필요하다.

문항 [Ⅲ]은 문제풀이과정에서 더 편리한 기호의 선택하는 능력도 매우 중요하다. 문제 푸는 과정에서, 연속된 세수는 다양하게 나타낼 수 있다. 적절한 기호의 선택은 문제에서 구하고자 하는 결과에 따라 적절하게 선택해야 하고, 이를 통해 계산 과정을 단순화할 수 있다. 최적의 기호 선택은 수학적 직관이 필요하며 이를 기호감각의 한 요소로 볼 수 있다.
문항 [Ⅳ]은 시각적 표현 및 시각적 표상을 강조하는 입장에서 보면 기호의 시각화를 위한 많은 노력이 필요하다. 유클리드 기하 중에서 암묵적으로 시각적인 표현의 도움을 빌어 논리적 결론을 유도하는 다양한 아이디어가 있음을 볼 때 기호의 시각화는 기호감각의 중요한 측면이라고 할 수 있다.

문항 [Ⅴ]은 산술과 대수 사이의 인지적 마찰로 인해 학생들이 산술에서 대수로 이행하는 과정에서 많은 인지적 장애와 어려움과 오류 등이 나타난다. 산술에서 대수로의 이행시 가장 중요한 것은 대수적인 식을 하나의 처리과정이 아닌 기호를 수학적 대상으로 인식할

수 있어야 한다.

대수적 표기에서 나타나는 오류는 연속적 표기에 대한 문제이다. 학생들은 대수에서 연속적 표기를 산술에서의 병렬 표기와 비슷한 것으로 생각한다. 산술에서 두 수의 병렬 표기는 덧셈을 의미하지만 대수에서의 연속적 표기는 곱셈을 나타낸다.

수학에서 $3m$은 길이의 단위인 미터를 의미하기도 하고, $m\times 3$ 또는 $m+m+m$을 의미하기도 한다. 대수에서는 수체계와 문자체계라는 서로 다른 두 가지 기호 체계를 사용하기 때문에 기호를 생략하여 간편하게 사용할 수 있다. 문항 [V]는 연산 기호의 축약으로 다양한 규약들을 내면화하고 있는가를 평가할 수 있는 문항이다.

2. 연구의 대상자

본 연구에서는 대학부설 과학영재교육원과 지역교육청 부설 영재교육원, 지역교육청 부설 지역공동영재학급에서 영재 교육을 받고 있는 6학년 학생을 연구 대상으로 하였다. 초등학교 6학년 정규교육과정에서 아직 형식적인 대수를 배우지 않았지만 대수적 표현이 가능한 영재를 대상으로 하였다.

또한 초등학교 6학년 수학영재들의 기호감각의 특성을 보다 분석하기 위한 비교 집단으로 일반학급에 있는 초등학교 6학년과 중학교 1학년 학생 중 교과 성적에 근거하여 우수아(상위권)에 포함되어 있는 학생을 선정하였다.

이 연구는 A, B, C집단 간에 수학적 능력의 수준 차이가 있음을 가정하지만 각 집단이 어떤 수준을 대표한다고 단정하지는 않으며 표집된 각 학생들이 그 집단을 대표한다는 명확한 근거는 없다. 다만 전대수 시기에 있다고 보는 여러 수준의 초등학교 6학년 학생들이 가지고 있는 기호감각 정도를 예시적으로 확인하기 위하여 각 집단 내에서 일부 학생들(개별 ID로 표시)을 대상으로 구체적인 사례를 살펴보고자 한다.

<표 2> 연구의 대상자

구분	소속(학년)	인원(명)	비고 (해당연령에서의 집단수준)	학생 ID (집단_이름)
집단A2	A대학부설과학영재교육원심화반(초수6)	10	상위 0.05%	A2_SH
집단A1	A대학부설과학영재교육원심화반(초수6)	6	상위 0.1%	A1_SH
집단B2	K교육청 부설 영재교육원 (초6)	15	상위 1%	B2_DY, B2_JY B2_SY, B2_SH
집단B1	K초교 부설 지역공동영재학급 (초6)	20	상위 1%	
집단C2	I초등학교 6학년	2	상위 10%	C2_SY
집단C1	I중학교 1학년	2	상위 10%	

3. 자료 수집 및 분석

관찰, 활동지, 면담을 통해 수집한 자료를 각각의 집단별로 종합하여 전체적인 기호감각의 정도를 살펴보았다. 이후 학생들의 기호감각의 5가지 구성요소(기호 도입의 필요성 인식, 기호의 의미 읽기, 맥락에 적합한 기호 선택, 기호의 시각화를 통한 패턴 추측, 다른 맥락에서 기호의 역할 인식)에 따라 분석틀을 만들어 자료를 분석하였다.

각 문항에 대한 집단별 정답율과 함께 서술형 답안의 내용을 구체적으로 분석하여 어떤 기

호감각의 요소가 얼마나 사용되는가 또는 어떻게 내면화된 것으로 보이는가를 살펴볼 것이다. 이 연구에서는 기호감각 요소를 여러 문항을 제시하고, 필요에 따라 대문항 아래 소문항 여러 개를 두어 보다 자세한 판단 근거를 확보하고자 하였다. 심층적인 해석이 필요한 경우 면담을 실시하여 학생들의 답안 이면에 포함되어 있는 다양한 배경적 요소와 사고 과정을 파악하는 질적 분석을 시도하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

1. 집단별 비교를 통한 수학영재들의 기호감각 특성 분석

기호감각에 대한 집단별 반응을 중심으로 초등학교 6학년 수학 영재들에게 나타나는 특성을 다음 〈표 Ⅳ-1〉과 같이 정리할 수 있다.

〈표 Ⅳ-1〉 집단에 따른 기호감각 분석

기호감각요소 \ 집단별(인원)		일반학생		영재학생			
		C1(2명)	C2(2명)	B1(20명)	B2(15명)	A1(6명)	A2(10명)
기호 도입의 필요성 인식	상			8	4	5	9
	중	2	1	2	1	1	1
	하		1	10	10	0	0
기호의 의미 읽기	상			6	6	5	9
	중	2		10	8	1	1
	하		2	4	1		0
맥락에 적합한 기호 선택	상			16	11	6	7
	중	1		4	4	0	3
	하	1	2	0	0	0	0
기호의 시각화를 통한 패턴 추측	상	1		10	13	5	8
	중	1		6	2	1	2
	하		2	5	0	0	0
다른 맥락에서 기호의 역할 인식	상			8	6	5	6
	중	2	1	12	9	1	4
	하		1	0	0	0	0

1) A집단(대학부설 과학영재교육원 수준)의 기호감각

‘기호 도입의 필요성 인식’ 문항에서 $a \times x = b$의 방정식에서 a와 x의 차이를 기술하라는 문제에 대한 반응이 ‘a는 상수 혹은 a는 x의 계수’이고, ‘x는 미지수’라 반응한 학생들이 43.75%이고, ‘x는 a, b에 따라 달라지는 변수’라고 인식한 학생들은 18.75%로 a와 x의 차이를 인식하고 있는 학생들의 비율이 다른 집단에 비해 높게 나타났다. 또한 ‘기호의 의미 읽기’ 문항에서는 구체적인 수를 대입하여 문제를 푸는 것이 아니라 93.75%의 학생들이 세 수의 성질에 기반하여 그 이유를 설명하였다. ‘맥락에 적합한 기호 선택’에 있어 ‘계산을 단순화하기 위해서(31.25%)’라는 응답보다 ‘구하고자 하는 것을 n으로 놓고(68.75%)’ 푸는 것으로 보아 기호 선택에 있어 상당히 자동화된 경로가 있음을 알 수 있다.

‘기호의 시각화를 통한 패턴 추측’에서 그림의 단점을 기술하라는 문항의 답을 논리적 증명이 힘들다고 진술한 A2_SH와의 면담과정에서도 그 사실을 알 수 있었다. ①에서와 같이 그림이 논리적 증명이 될 수 없다고 진술하고 문자기호를 사용하여 ②번과 같이 완벽한 논리적 증명을 수행하였다.

A2_SH : 그림에서 보면 정사각형이니깐. n^2의 형태임을 알 수 있어요.

연구자 : 그렇다면 그림의 단점은?

A2_SH : <u>논리적인 증명이 힘들잖아요.…①</u>
연구자 : 그림은 논리적인 증명이 힘들다는 이야기니?
A2_SH : 네...
연구자 : 논리적 증명은 어떻게 해야하는건데?
A2_SH : <u>문자를 사용해서요...</u>
연구자 : 문자를 사용해서 어떻게?
A2_SH : 음... 왼쪽과 오른쪽으로 나누어서 연속된 수의 합으로 나타내보면 $\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2n^2}{2}=n^2$…②

$3m$이 의미하는 것 중, 길이의 단위를 의미한다는 것을 제외한 ①,④,⑤를 선택한 학생이 18.75%였다. 나머지 81.25%의 학생이 $3m$의 의미를 모두 선택하였다. Ⅴ-2의 문항에서 '$3\frac{1}{2}$은 $\frac{3}{2}$의 가분수로 만들기 위해 $3\frac{1}{2}$로 만들 수 있으나, $3m$은 분수가 없기 때문에 $3+m$로 볼 수 없다'고 잘못 진술한 학생도 있었다. 상당히 우수한 영재집단임에도 불구하고, 초등학교를 거치는 동안 수에 대한 조작이 익숙해져 대수를 다룰 때에도 이를 조절하는 것에 대해 어려움을 보였다.

또한 '$3\frac{1}{2}$은 3과 $\frac{1}{2}$이라고 읽지만, $3m$은 '과'가 없기 때문에 덧셈이 아닌 곱셈이다.' 라고 진술한 학생도 있었다. 이는 학생들이 기호의 특성과 수나 일상 언어와의 유사성과 차이점 등을 혼돈하기 때문이다. 이는 학습 내용이 수에 관한 비교적 구체적인 내용으로부터 기호를 다루는 추상적인 내용으로 급속히 전환되기 때문이다(우정호, 1998 : 239). 그러나 81.25%의 학생이 두 수의 병렬 표기는 덧셈을 의미하지만, 수와 문자에서의 연속적 표기는 곱셈을 의미한다는 정확한 진술을 하였다.

A집단의 '다른 맥락에서 기호의 역할 인식'은 우수하지만, 일부 학생들에게서 대수에서 새롭게 정의된 개념을 산술에서와 같은 방법으로 사용하는 학생이 있었으며, 일상 언어와 산술 언어가 부분적으로 모순을 일으키는 경우도 있었다. 성공적인 대수학습이 이미 이루어진 우수한 집단임에도 불구하고, 수의 계산 법칙이 대수에 적용 가능한 것과 그렇지 않은 것을 식별하지 못하여 산술과 대수 사이에서 혼란을 보이는 학생이 있음을 알 수 있다.

2) B집단(교육청부설 영재교육원)의 기호감각

'기호 도입의 필요성 인식'에 있어 정해지지 않은 값을 구체물을 사용하여 측정하거나 문제 속의 용어로 진술한 학생들의 반응 비율은 A집단과 비슷하나 문자 기호를 도입하는 비중은 매우 낮았다.

$a\times x=b$의 방정식에서 a와 x의 차이를 기술하라는 문제에서 'a는 상수 혹은 a는 x의 상수이고, a,b에 따라 달라지는 변수'라고 그 차이를 인식한 학생은 2명이었다. 94.28%의 학생들이 그 차이를 인식하고 있지 못하였다.

B집단의 '기호 도입의 필요성 인식'은 다소 부족하다. 정해지지 않은 값에 대해 구체물을 통해 그 값을 측정하거나 문제 속의 용어를 사용하는 비중은 A집단과 비슷하나 문자기호를 도입하는 비중은 매우 낮았다. 또한 대부분의 학생이 변수나 미지수, 상수[10]에 대한 이해가

10) 미지수는 이미 그 값이 정해져 있지만 아직 알고 있지 못한 값을 나타내는 기호이며, 상수는 방정식이나 함수의 계수나 상수항과 같이 논의되는 상황에서 어떤 정해진 값을 의미하지만 일반적인 값을 나타내는 기호이

미약함을 알 수 있다. 일부분의 학생을 제외한 학생들이 정해지지 않은 수로서의 미지수, 일반적인 값을 나타내는 상수, 변하는 양에 대한 표현으로서의 변수의 특징을 이해하지 못하는 것으로 파악된다.

'기호의 의미 읽기' 문항에서는 85.71%의 학생들이 n, $n+1$, $n+2$의 특징을 모두 열거하였지만, 연속된 세 자연수의 곱의 특징을 선택하라는 문항에서는 기호에 구체적인 수를 대입하거나 연속된 세 수의 곱을 예로 들어 공통점을 추출하는 등 기호의 의미를 다시 산술로 환원하여 문제를 해결하고 있는 학생이 51.42%로 나타났다.
이를 통해 기호를 대수적으로 해석하는 능력은 우수하지만, 이것의 의미를 발전시키고 확대하여 문제 해결에 이용하는 학생들의 수는 채 절반에도 미치지 못함을 알 수 있다.
다음은 연속된 세수의 곱의 예에서 공통점 추출하여 답을 고른 B2_JY의 면담을 기록한 글이다. 이 면담은 각각의 세 수의 성질을 이용하여 문제를 푸는 과정을 담고 있다.

연구자 : 연속된 세 수는 어떤 특징을 갖고 있을까?
B2_JY : 2의 배수와 3의 배수요.
연구자 : 아~ 그럼 6의 배수인 것은 어떻게 알았어?
B2_JY : 6,24,60 등이 다 6의 배수잖아요.
연구자 : **다른 방법은 없을까? 꼭 6,24,60처럼 일일이 예를 들어야 할까?**
B2_JY : 글쎄요.
연구자 : 각 수들의 특징을 이용하는 것은 어떨까? 어떤 특징이 있었지?
B2_JY : 2의 배수와 3의 배수 또...
연구자 : **그래. 2의 배수와 3의 배수인 것은 알고 있어. 2개의 수를 곱한다면 어떻게 될까?**
B2_JY : 6의 배수가 되겠죠?
연구자 : 그럼 수의 특징을 다 찾은 것 같구나.

Ⅱ-1문항과 관련지어 세수의 성질을 이용하여 대수적으로 해석한 후, 문제를 해결한 학생은 34.28%에 불과하였다. 이를 통해 기호 의미 파악에 대한 이해가 각기 다른 수준에 있음을 알 수 있었다. 결국 상당수의 학생들이 기호를 해석하는 능력은 우수하지만, 이를 기호를 대수적으로 해석한 후, 이를 발전시키는 학생은 절반에 미치지 못하였다.
이는 산술에서의 시각적 기호가 주로 자리지기로서 다루어지기 때문에, 구체적인 수를 넣지 않으면 의미를 갖기 어려운 경우가 많기 때문이다. B집단의 학생 중 상당수가 사물의 구체적 특성에 의존하는 상황을 완전히 벗어나지 못한 것으로 보인다.
'맥락에 적합한 기호 선택에' 있어 '계산식을 단순화하기 위해서'와 '구하고자 하는 것을 n으로 선택한다'는 학생의 반응 비율이 비슷하게 나온 것으로 보아 식의 구조 파악을 통해 기호를 선택하고 점검할 수는 있지만, A집단처럼 기호 선택에 있어 자동화된 경로에 대한 일관성은 찾을 수 없었다.

문항 Ⅳ-1에서 $n=1033$일 때, '수s'의 답을 구하는 식은 모든 학생들이 정확하게 표현하

며, 변수는 어떤 집합에 속하는 모든 원소를 취할 수 있다는 의미에서 변하는 값을 나타내는 기호이다. 변수는 어떤 집합의 원소를 임의적으로 동시에 표현하는 多價名詞로서, 일반적으로 말해 자리지기로서 사용되는 기호라고 할 수 있다. 상수는 변수로 볼 수 있으며, 방정식이나 부등식을 명제함수로 보면 미지수역시 변수로 볼 수 있다(우정호, 1998 : 236-237).

였다. Ⅳ-2에서 여러 개의 작은 정사각형으로 이루어진 탑을 하나의 큰 정사각형 형태로 변환하라는 문제에서 45.71%의 학생이 정확한 그림과 정사각형의 개수를 정확하게 표현하였고, 나머지 54.29%의 학생이 그림은 그렸으나 사각형의 개수를 정확하게 표현하지 못하였다.

문제를 해결할 때, 어떤 그림을 선택하는지는 학생에 따라 각기 달랐지만, 문제를 이해하거나 규칙을 발견하는 데에는 그림이 상당한 도움을 주고 있음을 알 수 있었다. 학생들은 패턴을 추측하는데 시각적인 표현이 매우 유용하며 훨씬 이해하기 쉽다는 것을 인식하고는 있지만 이를 일반화하여 기호로 나타내는 데는 A집단에 비해 상당한 어려움을 보이고 있음을 알 수 있다.

이는 형식적, 추상적인 사고가 가능하지만 아직 완전한 것이 아니며, 사고가 이 시기의 학생은 문자식을 완전히 추상적이고 형식적으로 조작할 수는 없고 수에 대한 구체적인 이미지에 의존할 필요성이 아직 남아 있는 상태임을 알 수 있다.

'다른 맥락에서 기호의 역할 인식'에서는 학생들이 다양한 기호 해석의 능력은 갖추고 있으나 산술적 상황과 대수적 상황에서의 표현 차이에 대한 이해에는 차이가 있음을 알 수 있다. 결국 대부분의 학생들이 산술적인 상황이나 대수적인 상황에서 기호를 해석하는 것을 학습하였지만, 그것을 내면화시켜 의미있게 적용하는 수준까지는 이르지 못하였음을 알 수 있다.

3) C집단(일반학급)의 기호감각

C집단의 '기호 도입의 필요성 인식'은 아직 이루어지지 않고 있음을 알 수 있다. 시각적 기호와 문자 기호의 학습은 이미 이루어졌으나 정해지지 않은 값에 기호를 도입하는 것이 아니라 길이의 어림을 이용해 문제를 해결하고자 하였다. 학교 교육과정에서 문자기호의 사용이 도입된 C1집단의 학생도 정해지지 않은 값에 대한 기호 도입의 필요성을 느끼지 못하고 있었다. C1집단의 '기호의 의미 읽기' 능력은 아직 초기 단계임을 알 수 있다. 이 집단은 연속된 세 자연수의 특징을 모두 열거하였으나 '수s'의 특징을 선택하는 문제에서 그 특징 중 일부만을 사용하여 문제를 해결하였다. 이에 반해 C2집단은 '기호의 의미 읽기' 능력이 아직 형성되지 않음을 알 수 있다.

C집단의 '맥락에 적합한 기호 선택' 능력은 부족한 것으로 나타났다. A, B 집단과는 다르게 기호를 사용하려는 학생은 1명뿐이었고, 주로 구체적인 수를 대입하여 문제를 풀었다. C집단은 기호 도입의 필요성을 느끼지 못하고 있으며, 더욱이 맥락에 적합한 기호를 선택하려는 경향은 거의 보이지 않고 있다.

문항 Ⅳ-1에서 $n=10$일 때, '수s'의 식은 100%의 학생들이 정확하게 표현하였다. Ⅳ-2에서 정사각형으로 이루어진 탑을 정사각형으로 변환하라는 문제에서 정확한 그림과 정사각형의 개수를 정확하게 표현한 학생은 없었다. $n=100$일 때, '수 s'의 값을 구하는 문제에서는 C1집단의 학생이 오른쪽의 정사각형의 가로와 세로의 칸의 개수를 곱해서 그 답을 구하였고 나머지 75%의 학생이 오답률을 보였다.

C1집단의 경우 기호 문자의 도입은 시작되었지만 그림을 통해 문제의 구조를 파악할 수 있는 시각화는 이루어지지 않음을 알 수 있다. C집단의 '기호의 시각화를 통한 패턴 추측' 능력은 아직 미약함을 알 수 있다.

다른 맥락에서 기호의 역할 인식에서 $3m$을 길이의 단위로만 파악하고 있으며, 초등학교

교육과정에서 $3\frac{1}{2}$과 $3m$에 대해 학습하였음에도 불구하고 그 차이를 구체화하는 C2_SY의 면담과정에서 '배웠지만 잘 모르겠다'는 식의 반응을 볼 수 있었다. C1집단은 중학교 교육과정에서 문자 기호의 도입이 시작되었음에도 불구하고 길이의 단위로만 파악하고 있었다.

2. 요소별 비교를 통한 수학영재들의 기호감각 특성 분석

Arcavi(1994)는 기호감각의 특징을 설명하면서 문제를 대수로 공식화하고 공식화된 문제를 풀고 다시 원래 문제의 관점에서 결과를 재해석할 때 기호의 의미 이해를 강조한 것과 그 맥을 같이 하고 있다.

문항 Ⅲ은 맥락에 적합한 기호의 선택 여부를 묻는 문항으로 A1_SH는 세 수를 $n, n+1, n+2$ 혹은 $n-2, n-1, n$로 놓고 합을 구했을 경우 답이 제일 작은 수나 제일 큰 수가 나올 것이라 예상하고, 구하고자하는 가운데 수를 n으로 놓은 $n-1, n, n+4$을 선택한다. 이를 바탕으로 볼 때 대부분의 학생들은 맥락에 적합한 기호 선택을 위해 문제를 푸는 과정이나 결과를 예상하는 과정에서 세 수를 나타내는 기호의 의미를 파악하고 그 차이를 점검하게 된다는 것을 알 수 있다. 다시 말해 학생들은 기호의 의미 이해를 통해 더 나은 기호를 찾기 위한 필요성 및 방향성을 인식하게 되는 것이다.

문항 Ⅳ는 기호의 시각화를 통한 패턴 추측여부를 묻는 문항으로 s에서 $n\times n$라고 대수화에 성공한 B1_SY에게 수식을 보고 그림을 표현할 수 있는지를 묻는 면담 내용이다.

연구자 : 여기처럼 보조 문항없이 수식만으로도 그림을 그릴 수 있니?
B1_SY : 네. <u>$n\times n$은 정사각형의 가로와 세로의 곱</u>으로 볼 수 있어요.…①
B1_SY : 어떻게 정사각형으로 만드느냐
연구자 : 그 다음에는...가 문제인데요.
연구자 : 어떻게 만드는데?
B1_SY : s을 그림으로 나타내면 한 개씩 증가하다가 줄어드는 산 모양이 되고, 이 중 절반을 잘라서 이걸(검은 부분) 돌려서 요쪽(빈공간)으로 붙이면 정사각형이 되요. …②

①에서 $n\times n$의 기호 표현을 보고 같은 수의 곱을 정사각형에서 가로와 세로의 곱으로 그 의미를 해석하였다. $n\times n$을 같은 수의 곱이라는 단순한 사실을 넘어 이를 정사각형의 가로와 세로의 곱이라는 의미로 연결지어 해결방법을 찾으려고 하였다. 이러한 사고의 변화는 ②의 과정을 가능하게 하였고 이를 통해 기호감각의 요소인 기호의 의미 이해를 중심으로 시각화를 통한 패턴 추측이 이루어짐을 알 수 있다.
특히 B집단의 학생들은 형식적이고 추상적인 사고가 가능하지만 아직 완전하지 않으며 문자식을 완전히 추상적이고 형식적으로 조작하지 못하고 수에 대한 구체적인 이미지에 의존할 필요성이 남아 있는 상태로 시각화를 통해 기호의 의미를 파악하고 대수 표현에 성공하였다.

문항 Ⅴ는 다른 맥락에서 기호의 역할의 인식 여부를 묻는 문항으로 $3\frac{1}{2}$과 $3m$의 차이를 기술한 학생들의 반응 유형에서 학생들은 연산 기호가 축약된 두 기호의 관계에 대해 서로 다른 의미 부여를 하고 있음을 알 수 있다.

'$3\frac{1}{2}$은 가분수로 만들기 위해 $3\frac{1}{2}$로 표현할 수 있으나, $3m$은 분수가 아니기 때문에 $3+m$로 볼 수 없다'고 응답한 학생들은 분수에서 사용되는 축약된 연산 기호의 의미를 대수 표현에 그대로 적용하였다. 또한 '$3\frac{1}{2}$은 3과 $\frac{1}{2}$이라고 읽지만, $3m$은 '과'가 없기 때문에 덧셈이 아닌 곱셈이다'라고 진술한 학생들의 유형에서는 기호를 읽는 과정에서 '과'에 대한 의미를 '+'으로 파악하고 있음을 알 수 있다. 이는 산술에서 축약된 연산기호를 읽을 때 사용되어 지는 언어의 의미를 대수에서도 동등하게 적용한 것으로 볼 수 있다.
이를 바탕으로 산술과 대수에서 축약된 연산 기호에 대한 의미 해석 능력이 '다른 맥락에서 기호의 역할 인식' 과 관련이 있음을 알 수 있다.

Ⅴ. 결 론

초등학교 6학년 수학영재들을 대상으로 한 기호감각 검사지 분석과 학생의 면담과정에서 다음과 같은 점을 확인할 수 있었다.

첫째, 우리나라 초등학교 6학년 수학영재들의 기호감각에 대한 연구 결과 영재집단이라 하더라도 기호감각에 있어 집단별 수준 차이가 나타난다.
기호감각 문항지를 투입한 결과 A집단(A대학교 부설 과학영재교육원 초등수학심화반 6학년)은 대수단계, B집단(경기도 K교육청 부설영재교육원, 인천 K초교 부설지역공동영재학급)은 전대수단계, C집단(I초등학교 6학년, I중학교 1학년)은 산술단계에 도달해 있음을 알 수 있다. A집단의 학생들은 기호를 선택하고 사용하는데 뚜렷한 경향성과 자동화된 경로가 있었고, 기호의 의미 또한 정확하게 파악하는 것으로 보아 기호의 사용이 자유로운 대수 단계에 있음을 알 수 있다. 반면에 B집단은 대부분의 학생들이 산술적인 상황이나 대수적인 상황에서 기호를 해석하는 것을 학습하였지만 이를 내면화시켜 의미있게 적용하는 수준까지는 이르지 못하고 다시 산술로 돌아가 문제를 해결하려는 경향성이 매우 강해 이 집단이 산술에서 대수로의 이행단계 즉, 전대수단계에 있음을 알 수 있었다. C집단은 수나 기호의 형식적인 표현에서 그 의미를 해석하고자 하는 시도를 하지 않고 구체적인 수를 대입하거나 어림으로 문제를 푸는 현상으로 볼 때 현재 그들이 산술단계에 있음을 알 수 있다.

둘째, 기호감각의 5개 요소는 완전하게 구분되는 것이라기보다는 기호의 의미 읽기를 중심으로 내적으로 밀접하게 관련되어 몇 가지 요소의 조합에 의하여 드러남을 알 수 있다.
이러한 현상은 Arcavi(1994)가 기호감각의 특징을 설명하면서 문제를 대수로 공식화하고 공식화된 문제를 풀고 다시 원래 문제의 관점에서 결과를 재해석할 때 기호의 의미 이해를 강조한 것과 그 맥을 같이 하고 있다.

또한 기호감각의 문항 분석 결과 기호의 의미 읽기를 중심으로 내적으로 밀접하게 관련되어 있음을 알 수 있다. 문항 Ⅲ에서 대부분의 학생들은 맥락에 적합한 기호 선택을 위해 문제를 푸는 과정이나 결과를 예상하는 과정에서 세 수를 나타내는 기호의 의미를 파악하고 그 차이를 점검하게 된다는 것을 알 수 있다. 다시 말해 학생들은 기호의 의미 이해를 통해 더 나은 기호를 찾기 위한 필요성 및 방향성을 인식하게 되는 것이다. 문항 Ⅳ에서 전대수단계에 있는 B집단의 학생들은 형식적이고 추상적인 사고가 가능하지만 아직 완전하지 않으며 문자식을 완전히 추상적이고 형식적으로 조작하지 못하고 수에 대한 구체적인 이미지

에 의존할 필요성이 남아 있는 상태로 시각화를 통해 기호의 의미를 파악하고 대수 표현에 성공하였다. 문항 Ⅴ에서 산술에서 축약된 연산기호를 읽을 때 사용되어 지는 언어의 의미를 대수에서도 동등하게 적용한 것으로 볼 수 있다. 이를 바탕으로 산술과 대수에서 축약된 연산 기호에 대한 의미 해석 능력이 '다른 맥락에서 기호의 역할 인식' 과 관련이 있음을 알 수 있다.

기호감각은 감각이 가지고 있는 직관적 성격 때문에 교수학적 변환 과정을 어렵게 하는 측면이 있다. 직관적이고 추상적인 기호감각을 위한 신중한 접근을 목표로 서로 관련되는 요소를 적절히 조합하는 것이 중요하다. 따라서 기호감각을 지도하고자 할 때 상황에 따라 여러 측면을 적절하게 고려해야 하며 어떤 관점에 비추어 조합하고 어떤 방법으로 다룰 것인가에 관한 종합적인 관점이 필요하므로 대수 학습을 위해 아래와 같은 두 가지를 제안하고자 한다.

첫째, 기호감각은 학습자의 수준을 고려하여 각 단계에 맞게 지도해야 한다. 모든 수학 학습이 학생의 수준 분석 후 각 단계에 맞춰 지도되긴 하지만, 기호감각 학습은 학생들에게 새로운 원리나 개념을 소개하기 위한 것이라기보다는 이미 알고 있는 원리나 개념에 기호감각을 적용하여 새로운 시각으로 문제를 바라보게 함으로써 좀 더 용이하게 대수 문제를 해결하는 역할을 수행한다.

둘째, 기호감각은 기호의 의미 읽기를 중심으로 지도해야 한다. 기호감각은 기호의 의미 이해를 중심으로 내적으로 밀접하게 관련되어 있으며 수학 기호의 형식적 조작이 아닌 기호의 의미에 대한 충실한 접근으로 수학의 지나친 알고리즘화를 방지하고 대수학습으로의 점진적이고 유기적인 접근이 필요하다.

참고문헌

김미정(2004). **산술적 지식과 대수적 지식 사이의 이행 과정에서 나타난 연결과 단절 현상에 관한 연구**. 한국교원대학교 석사학위 논문.

김성준(1997). 산술에서 대수로의 전이에 관한 고찰. **공군사관학교논문집, 39**, 377-414.

______(2003). 대수적 사고와 대수 기호에 관한 고찰. **수학교육학연구, 12**(2), 229-245.

______(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 박사학위 논문.

송상헌, 신은주(2007). 수학 영재의 추상화 학습에서 기호의 의미 작용 과정 사례 분석. **학교수학, 9**(1), 161-180.

송영무, 양두례(1996). 산술에서 대수로의 이행과정에서 나타나는 장애에 관한 연구. **과학과 교육, 4**. 41-59.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울 : 서울대학교출판부.

장혜원(1997). **수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

Arcavi(1994). Symbol sense : Informal Sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics. 14*(3), 24-35.

______(2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies of Mathematics. 52,* 215-241.

______(2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics. 25*(2), 42-47.

Arzarello, F. & Bazzini, L. & Chiappini G. (2001). *A model for analysing algebraic processes of thinking*. In R. Sutherland, et al. (eds.), Perspectives on school algebra. Kluwer Academy Publishers.

Cobb, P. (2002). Modeling, symbolizing, and tool use in statistical data analysis. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel(Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 171-195.

Fey, J,T.(1990). 'Quantity', in L. A. Steen(ed.), On the Shoulders of Giants New approaches to Numeracy, *National Academy Press*. 61-94.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promote Multiple representation in algebra. In A. A. Albert & R. C. Frances(eds.), 2001, Yearbook : *The roles of representation in school mathematics*. Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics. 172-185

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2002). *Symbolizing, modeling, and instructional Design*. Perspectives on discourse, tools, and instructional design. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum.

Kieran, C & Chalouh, L. (1999) *Prealgebra : The transition form Arithematic to Algebra*. In B. Moses(ed.), Algebraic thinking, Grades K-12. NCTM, Reston, VA.

McIntosh, A., Reys, B.J. and Reys, R. E.(1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics. 12*(3), 2-8.

NCTM(1989). *Curriculum and evaluation Standards for School Mathematics*. Reston.

______(2000). *Curriculum and evaluation Standards for School Mathematics*. Reston.

Pierce, R.,(2002). Algebraic insight underpins the use of CAS for modeling. *The Montana Mathematics Enthusiast*. 2(2), 107-117.

Reys, R. E., Suydam M. N. , Lindquist M. M. , & Smit N. L. (1999). **초등 수학 학습지도와 이해**. 강문봉 외 18인(공역). 서울: 양서원.

Zehavi, N.(2004). Symbol sense with a symbolic-graphical system. *The Journal of mathematical behavior. 23(2)*, 183-203.

<부록>

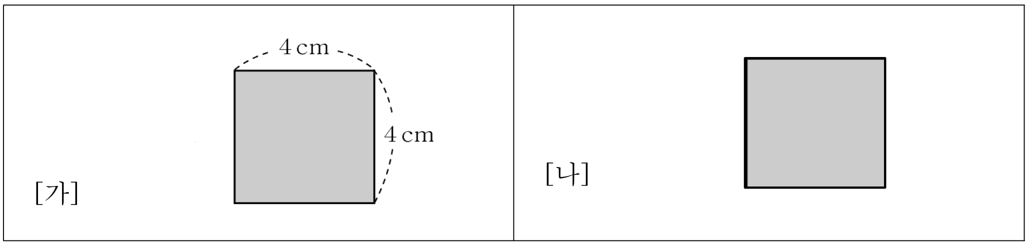
기호감각 검사지

알림 : 이 검사는 기호에 대한 여러분의 이해를 알아보기 위하여 실시하는 것입니다. 40분간 작성하시고, 옆 사람에게 물어보거나 답해 주지 마십시오.

답안 작성 시 주의사항 :

1. 문제에서는 정답을 요구하는 것이 아니라, 문제를 풀 때 여러분의 생각을 알아보고자 하는 것입니다
2. 먼저 문제를 잘 읽고, 무슨 내용이며, 무엇을 해결하라는 것인지를 생각하며 문제를 해결합니다.
3. 어떻게 문제를 해결했는지 풀이 과정과 흔적을 모두 남깁니다.
4. 어떻게 구하였는지를 설명할 때는, 다른 사람에게 설명한다고 생각하고 마음속으로 떠올리거나 생각한 것을 글, 그림, 표, 그래프, 식 등으로 자세하게 표현하면 됩니다.
5. 이전 문항의 응답결과에 따라 일부 문항을 건너뛸 경우가 있습니다. _문항을 잘 찾아 빠짐없이_ 답하여 주십시오.

[I] 다음을 잘 읽고 답하여 주세요.
다음 정사각형의 둘레를 구하여라.(단, 자는 사용할 수 없다.)



1-1. [가]와 [나] 문제의 가장 큰 차이는 무엇이라고 생각합니까?

1-2. [나]문제를 풀어 봅시다.
(1) [나]문제를 풀기 위해서는 무엇이 필요한가요?
(2) 왜 필요하다고 생각했나요?
(3) [나]의 문제를 해결해보세요.

1-3. 정사각형이 아닌 직사각형도 그 둘레는 구할 수 있나요? 얼마입니까?**(단, 자는 사용할 수 없습니다)**

1-4. 일반적인 수를 대신하기 위해서 문자를 사용하는 경우가 있습니다.
1-4-1. 문자를 처음 접한 곳은 어느 곳이었나요?
① 책을 통해서 ② 학원에서 ③ 학교수업시간에 ④ 기타:
1-4-2. 각각의 기호를 처음 접한 아이와 이해하고 사용한 나이를 적어주세요.

	종류	처음 접한 나이(학년)	이해하고 사용한 나이(학년)
시각적 기호	○, □, △...		
문자 기호	a, b, c, x, y, z...		

1-4-3. 이는 초등학교에서 □의 빈 칸을 채우는 것과는 어떻게 다르다고 생각합니까?

1-5. 다음을 잘 읽고 답하여 주세요.

[A] $2 \times x = 4$를 푸시오.	[B] $a \times x = b$를 푸시오.

1-5-1 [A]와 [B]의 가장 큰 차이는 무엇이라고 생각합니까?
1-5-2 [B]에서 a와 x는 서로 어떻게 다른가요?

[Ⅱ] n은 자연수이고, $n(n+1)(n+2)=S$이다.
2-1. n이 자연수일 때, n, $(n+1)$, $(n+2)$ 세 수의 특징을 모두 고르시오.---(　　　　)
① 연속된 세 수　　　　　　　　　　② 적어도 한 개는 짝수
③ 적어도 한 개는 홀수　　　　　　　④ 적어도 한개는 2의 배수
⑤ 적어도 한개는 3의 배수

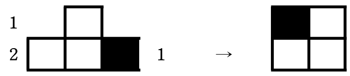
2-2. **2-1의 답을 바탕**으로 '수 S' 의 특징을 모두 고르시오.----(　　　　)
① 2의 배수　② 3의 배수　③ 4의 배수　④ 5의 배수　⑤ 6의 배수

[Ⅲ] 연속된 세 수 합이 18이다. 연속된 수를 구하려고 합니다.

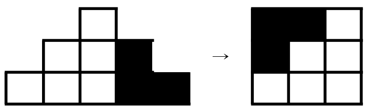
3-1. 연속된 세 수 중, **가운데 수를 구하려고** 합니다. 세 수를 문자 기호로 놓는 가장 적절한 것을 고르고, 선택한 이유도 쓰시오
① $n, n+1, n+2$　　② $n-1, n, n+1$　　③ $n-2, n-1, n$

3-2. 연속된 세 수 합이 18이다. 연속된 세 수 중, **처음 수를 구하려고** 합니다. 세 수를 문자 기호로 놓는 가장 적절한 것을 고르고, 선택한 이유도 쓰시오
① $n, n+1, n+2$　　② $n-1, n, n+1$　　③ $n-2, n-1, n$

[Ⅳ] $S=1+2+3+4+...+(n-1)+n+(n-1)+...+3+2+1$ 일 때, 수 'S'는?
4-1. 문제를 단순화합니다.

$n=1$ 일 때	$S=1$	
$n=2$ 일 때	$S=1+2+1=4$	
$n=3$ 일 때	$S=1+2+3+2+1$ $=9$	
생략		
$n=10$ 일 때	$S=$	①　　　　② →

4-1-1. $n=10$ 일 때, 수 'S' 식과 답 빈 칸에 쓰시오.

4-1-2. $n=3$ 일 때, 검은색 도형이  이동한 것을 참고하여, $n=10$ 일 때의 그림을 ①, ②에 그려 넣으시오.

4-1-4. $n=10$ 일 때, 정사각형의 가로와 세로의 개수를 각각 쓰시오.

4-2. $n=100$ 일 때, 수 'S'의 값은 얼마입니까?

4-3. $S=1+2+3+4+...+(n-1)+n+(n-1)+...+3+2+1$ 일 때, 수 'S'는?

4-4. 이 문제를 푸는 과정에서 그림의 장단점을 쓰시오.

장점	
단점	

[Ⅴ] $3m$의 뜻

5-1. $3m$이 뜻하는 것을 모두 고르시오. -------(   )

① $m+m+m$ ② 길이의 단위인 $3m$ ③ $3+m$ ④ $3\times m$ ⑤ $m\times 3$

5-2. $3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}$인 것처럼, $3m=3+m$으로 볼 수 있는가? (예__ 아니오___)

$3\frac{1}{2}$과 $3m$의 차이를 쓰시오.

기호감각 분석결과(A집단의 경우)

문제번호	구분	기준	A2_JH	A2_H	A2_SH	A2_YK	A2_J	A2_DY	A2_J	A2_KW	A2_YJ	A 2 MJ	A1_JK	A1_H	A1_K	A1_H	A1_S	A1_S	계
I-1		가는 풀 수 있고, 나는 풀 수 없다	○																1
		가로와 세로의 값이 없다.		○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	14
		도형의 위치			○														1
I-2-(1)		자, 컴퍼스,이쑤시개													○				2
		닮음비			○				○										2
		정사각형의 가로와 세로																	
		정사각형 네 변의 길이																	
		정사각형의 한 변의 길이	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○			○		11
		문자														○		○	2
I-2-(2)		길이를 재어 보려고							○						○				2
		둘레를 구하려고	○			○	○			○	○	○		○				○	8
I-2-(3)	아니오	길이가 주어지지 않아서													○				1
	예	구체적 물건으로 길이를 재서 구하기(자, 컴퍼스, 이쑤시개)							○										1
	예	문제 속의 용어로 표현(한 변의 길이)								○			○	○			○		4
	예	시각적 기호(□,△,○등)																	
	예	문자 기호(a,b,c,x,y 등)	○	○		○	○	○			○	○				○		○	9
I-3	아니오	이유없음		○															1
	아니오	변의 길이가 주어져 있지 않아서				○							○						2
	예	구체적 물건으로 길이를 재서 구하기(자, 컴퍼스, 이쑤시개)							○										1
	예	문제 속의 용어로 표현(가로, 세로)								○							○		2
	예	기호 두 개를 사용하여 표현(a,b 등)	○				○	○			○	○		○	○	○		○	9
I-4-(1)		①	○		○	○		○	○		○	○		○		○	○	○	11
		②		○			○						○						3
		③								○									1
	④	영재교육원																	
	④	집																	
I-4-(2)	시각적 기호(□, △, ○ 등)	처음 접한 학년	1	1	-3	4	1	1	-3	1	-1	1	2	2	3	1	-2	3	0.29
	시각적 기호(□, △, ○ 등)	이해하고 사용한 학년	2	1	-2	5	1	2	-1	1	1	1	3	3	4	1	1	4	1.14
	문자 기호(a,b,c,x,y 등)	처음 접한 학년	4	4	2	5	3	3	-2	3	1	3	5	3	4	3	-1	4	2.71
	문자 기호(a,b,c,x,y 등)	이해하고 사용한 학년	4	4	3	5	5	4	1	4	1	4	5	4	5	3	3	4	3.71
I-5-(1)		오류/논지 불분명	○									○			○	○			3
		숫자/문자																	
		[A]는 풀리고 [B]는 안 풀린다		○							○								2
		[A]의 x는 일정하고, [B]의 x는 일정하지 않다					○						○						2
		[A]는 [B]의 예이다.																	
		[A]의 상수를 [B]의 a, b가 '대신'한다.								○				○					2
		[A]는 풀리고 [B]는 $a\neq0$인 경우는 풀린다.																○	1
		[A]는 방정식이고 [B]는 부정방정식이다.							○										1
		[A]는 미지수(변수)가 1개이고 [B]는 미지수(변수)가 3개이다. ※ 'a, x의 역할을 바꾸어 생각할 수 있다' 등 다른 답변을 보고 사고 수준이 높다고 판정할 수 있는 경우에만 코드 8을 부여			○	○		○									○		4
I-5-(2)		오류/논지 불분명		○		○					○	○			○		○		6
		(특별한 근거없이) 다른 점이 없다																	
		a는 상수/x는 미지수(a는 어떤 수/x는 구하는 수 혹은 a는 숫자/x는 □이다)	○					○	○				○			○			5
		a는 나타내는 값이 정확하지만(고정되어 있지만) x는 a, b에 따라 달라지는 (변수)			○					○				○				○	3
		a는 '계수'/x는 미지수					○												2
		a는 방정식을 결정한다.																	
		a, x는 모두 변수이다 (서로 역할을 바꿀 수 있다.																	

문제번호	기준		A2_JH	A2_H	A2_SH	A2_YK	A2_J	A2_DY	A2_J	A2_KW	A2_YJ	A2 MJ	A1_JK	A1_H	A1_K	A1_H	A1_S	A1_S	계
	$a=\frac{b}{x}$ $(x\neq0)$등. 사고 수준이 높다고 판정할 수 있는 경우에만 코드 6 부여)																		
Ⅱ-1	2개 선택	②,③																	
	3개 선택	①,②,③																	
	4개 선택	①,②,③,④																	
	5개 선택	①,②,③,④,⑤	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	16
Ⅱ-2-(1)	1개 선택	①																	
		②																	
		③																	
		⑤			○								○						2
	3개 선택	①,②,⑤	○	○		○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	14
		①,②,③																	
	5개 선택	①,②,③,④,⑤				○												○	2
Ⅱ-2-(2)	반례이용								○										1
	세수의 특징과 연결시키지 못하고 일부분만 진술																		
	연속된 세수의 곱 예에서 공통점 추출																		
	구체적인 수를 대입하여																		
	세 수의 성질(적어도 한 개는 2, 3의 배수)을 이용하여		○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	15
Ⅲ-1	①	이유없음																	
	②	계산식을 단순화 할 수 있어서		○						○		○	○					○	5
		구하고자 하는 것을 n으로	○		○	○	○	○	○		○			○	○	○	○		11
	③																		
Ⅲ-2	①	계산식을 단순화 할 수 있어서		○						○		○							3
		구하고자 하는 것을 n으로	○		○	○	○	○	○		○		○	○	○	○	○	○	13
	②	n을 구한다음 -1																	
		가운데를 기준으로 함																	
	③																		
Ⅳ-1-(1)	1+2+...+9+10+9+...+2+1=100으로 정확하게 구함		○	○	○	○	○			○		○	○		○	○	○		11
	1+2+...+9+10+9+...+2+1=100의 합을 미기재							○	○		○							○	4
	1+2+...+9+10+9+...+2+1=100의 합에서 오류													○					1
Ⅳ-1-(2)	그림을 2개 다 그리지 못함																		
	왼쪽 그림은 그리나 이동한 그림을 아예 못 그림																		
	그림을 그리나, 이동한 검은 정사각형의 가로 세로의 개수와 전체 정사각형의 한변의 개수 모두 정확하게 표현하지 못함																	○	1
	그림을 그리나, 이동한 검은 정사각형의 가로 세로의 개수를 정확하게 표현하지 못함				○	○				○					○				4
	그림을 그리나, 탑 모양의 정사각형의 한 변의 개수를 정확하게 표현하지 못함																		
	그림을 완벽하게 그리고, 이동한 검은 정사각형의 가로 세로의 개수를 정확하게 표현		○	○			○	○	○		○	○	○	○		○	○		12
Ⅳ-1-(3)	무응답				○														
	10개		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	15
Ⅳ-2	오답							○						○					2
	1000	계산 오류																	
	10000	가우스의 덧셈을 통해서																	
		가로와 세로의 칸의 개수를 곱해서	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○		○	○	○	○	14
Ⅳ-3	무응답																		
	$n\times n$																		1
	n^2		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	15
Ⅳ-4	장점	세기 쉽다																	
		답을 알 수 있다	○							○			○				○		4
		좀 더 자세하게 표현																	
		문제를 이해하기 쉽다			○	○	○	○	○					○				○	7
		규칙발견		○							○				○	○			4
	단점	큰 수일 때는 그리기가 어렵다						○	○									○	3
		시간이 많이 소모된다. 그리기 귀찮다				○	○				○	○	○		○	○	○		8
		식을 알 수 없다	○																1
		논리적 증명이 힘들다			○									○					2
		반례 등장 가능								○									1
Ⅴ-1	1개 선택	②																	
	2개 선택	①,④																	
		②,④																	

문제 번호	기준		A2_JH	A2_H	A2_SH	A2_YK	A2_J	A2_DY	A2_J	A2_KW	A2_YJ	A 2 MJ	A1_JK	A1_H	A1_K	A1_H	A1_S	A1_S	계
	3개 선택	①,②,④																	
		①,④,⑤			○			○										○	3
	4개 선택	①,②,④,⑤	○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○		13
V -2	예	이유 없음																	
	아니오	논지 불분명	○			○													2
		$3\frac{1}{2}$은 3과 $\frac{1}{2}$이라고 읽지만 $3m$은 '과'가 없다.							○										1
		$3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}$ 두 수의 병렬 표기는 덧셈을 의미하고, 이는 분수에서만 적용되고, 일반화시키기에는 반례가 많음																	
		$3\frac{1}{2}$는 분수표기법이다. $\frac{2}{3}m$이라면 $\frac{2}{3}+m$이다								○					○				2
		$3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}$ 두 수의 병렬 표기는 덧셈을 의미하고, $3m$은 3은 길이의 단위인 미터를 의미하기 덧셈으로 분리할 수 없음																	
		두 수의 병렬 표기는 덧셈을 의미하지만, 수와 문자에서의 연속적 표기는 곱셈을 의미		○	○		○	○			○	○	○	○		○	○	○	13