

수학교육부진아를 대상으로 분수의 개념적 이해에서 분수의 덧셈으로의 전이 가능성 연구

하보금⁸⁾(경인교육대학교 대학원)

I. 서론

수학교육부진아는 수감각이 약하고 문제에 대한 이해능력과 해결능력이 떨어진다. 수학의 필요성을 인식하지 못하고 수학교육에 흥미를 보이지 않으며 수학 문제를 해결해나가는 것에 자신감이 없어 포기가 빠르다. 이것이 일반적인 수학교육부진아의 특징이다. 우리는 이러한 수학교육부진아를 지도할 때 오랜 시간과 노력을 들여 학습자에게 적합한 수준에 맞추어 하나하나 단계를 밟아 지도한다. 그렇다면 수학교육부진아를 지도할 때에는 학습 위계의 모든 단계에서 직접적인 수업 즉, 교사가 지식과 방법을 모두 제시해주어야 하는 것인가? 그리고 이것이 과연 수학교육부진아에게 가장 효과적이고 적합한 방법인가?

어떤 내용을 학습한 결과, 직접 훈련하지 않아도 다른 정신적·운동적 기능의 향상에 영향을 주거나 다음 학습을 촉진하는 것을 전이라고 한다. 다시 말해 하위기능을 훈련하면 상위기능을 가르치지 않아도 수행할 수 있거나 상위기능을 보다 쉽고 빠르게 습득할 수 있는 것을 뜻한다. 그렇다면 수학교육부진아에게도 전이가 이루어 질 수 있을까? 본 연구에서는 이러한 문제를 분수 영역에 적용해서 그 해답을 구하고자 한다.

학생들에게 분수에 대한 학습이 어려운 이유는 여러 가지가 있다. 먼저 분수는 전체-부분, 측도, 몫, 비, 연산자 등의 하위 개념을 가지고 있는데 이를 모두 이해해야 하며 그들 사이의 상호연관성도 이해해야 한다(신준식, 1996, p. 9). 둘째, 분수의 표기법과 연산 방법이 자연수와는 달리 복잡하다는 점이다. 셋째, 분수의 양적 개념 즉 분수의 크기에 대한 지도가 부족하다. 분수의 양적 개념 없으면 크기 비교나 연산이 제대로 이루어 질 수 없다. 마지막으로 학교 교육에서는 분수의 개념 지도보다 연산지도에 비중을 두고 있다는 점이다.

장재옥(2003)에 의하면 수학교육부진아들은 개념 이해가 절대적으로 부족하며, 개념 이해가 형성되지 않은 상황에서 원리를 이해하기 보다는 단순 암기에 의존하여 학습 활동에 임한다. 그것이 실생활과도 분리되어 있어 고립된 지식이 되고 수학교육부진아는 더욱 학습에 흥미를 잃게 되며 학습 능력 또한 떨어지게 된다. 김형조(2006)에 의하면 분수개념 이해 프로그램을 초등학교 6학년 수학교육부진아에게 적용한 결과 분수의 전체-부분 개념 이해와 분수의 양적 개념 이해 능력에 향상이 있는 것으로 나타났고 또한 연산 개념이해 능력 향상에도 효과가 있음으로 나타났다.

이상 살펴본 것과 같이 학생들이 분수 영역에서 오류를 많이 범하는 까닭은 분수의 개념적 이해를 충분히 획득하기 전에 절차적 지식이 강조되어 알고리즘을 기계적으로 암기하기 때문이다. 그러나 선행연구에 따르면, 학생들에게 분수 개념 학습 프로그램을 적용하면 분수의

8) 2010년도 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문요약을 요약한 것임.

개념적 이해 능력이 향상될 뿐만 아니라 연산 능력도 향상되는 것으로 나타났다. 그렇다면 수학학습부진아도 분수의 개념적 이해가 전제된다면 분수 연산의 알고리즘을 비형식적으로나마 스스로 구성할 수 있을까?

본 연구의 목적은 수학학습부진아도 분수의 개념적 이해를 획득하면 분수 덧셈으로의 전이가 이루어지는가의 여부를 살펴보는 것에 있다. 이를 위해, 분수 연산의 절차적 지식을 학습하지 않은 초등학교 5학년 수학학습부진아를 대상으로 분수의 개념적 이해를 향상시킬 수 있는 방법을 모색하고, 이를 프로그램화하여 학생들에게 투입한 후 분수의 개념적 이해를 토대로 분수의 덧셈으로의 전이가 발생하는지에 대해 살펴보고자 하였다. 본 연구를 통해 수학학습부진아의 잠재된 가능성과 그에 걸맞는 지도 방법에 대해 새로운 방향성을 제시하고자 한다.

본 연구에서는 다음과 같이 연구 문제를 설정하였다.

첫째, 초등학교 5학년 수학학습부진아의 경우 분수의 개념적 이해에서 분수 덧셈으로 전이가 이루어지는가?

둘째, 수학학습부진아를 대상으로 한 분수 개념 및 분수계산지도의 시사점은 무엇인가?

II. 이론적 배경

1. 이해와 전이

가. 개념적 이해

NRC(2001)는 개념적 이해를 수학적 아이디어들을 연결하고 기능적으로 파악하는 것이라 하였다(박혜경, 2003, p.7). 학생들이 개념적 이해를 했다는 것은 고립된 사실이나 방법을 아는 것 이상으로 왜 수학적 아이디어들이 중요한지 또한 언제, 어느 상황에서 그것이 유용한지 이해해야 한다. 박혜경(2003)은 학생들이 수학의 영역에서 개념적 이해를 했을 때야 비로소 개념과 절차 사이의 연결을 볼 수 있으며 왜 그러한 결과를 얻는지 그 결과의 의미가 무엇인지 논의할 수 있다. 개념적 이해를 했을 때 학생들은 스스로가 방법을 설명할 수 있고 경우에 따라선 수정할 수 있다.

나. 전이

전이는 앞서 행한 학습이 나중 학습의 효과에 영향을 주는 것을 의미한다. 전이에 대한 연합주의 심리학의 전통적인 설명은, 한 과제의 성공적인 학습은 두 과제가 어떤 같은 요소(즉, 동일한 결합)를 갖고 있는 범위에서, 두 번째 과제의 학습을 보다 수월하게 할 수 있는 것이다. 이것은 전이의 동일 요소(indential elements) 이론으로 알려져 있다. 동일 요소의 개념은 개별적인 결합 뿐만 아니라 법칙과 원리를 포함할 수 있도록 확장되었다(구광조 외, 2007).

2. 분수 개념 교수·학습에 관한 선행연구

가. 등분할

1) “똑같다”는 것에 대해 약속하기

Marshall Cavendish Education 출판사에서 개발한 싱가포르의 수학교과서 My Pals are Here! Maths(이하 MPH)에서는 분수의 개념에서 등분할과 등분할하는 방법을 강조하고 있다(정은실, 2009). MPH의 등분할 활동은 2학년에서 시작되는데 정사각형 모양의 종이를 사등분하고 ‘각 부분이 같은 크기일 때, 각 부분은 똑같다(equal)라고 합니다’라고 ‘똑같다(equal)’를 정의하고 마찬가지로 방법으로 ‘똑같지 않다(unequal)’를 정의한다(정은실, 2009, p. 31). 우리나라 교과서에서도 등분할 활동을 하고 있으나 ‘똑같다’는 것에 대한 정의를 하지 않고 사용하고 있다. 이에 정은실(2009)는 MPH에서와 같이 ‘똑같다’라는 것이 무엇을 의미하는지 먼저 확인하는 것이 바람직하다고 제안한다.

2) 연속량과 이산량을 함께 제시하기

수학 3-가 단계에서 등분할, 전체-부분의 의미로 분수가 처음 제시된다. 등분할 활동으로 교과서에서는 사과, 색종이, 사각형, 삼각형, 원 등의 도형모델 즉 연속량만 제시되고 이산량은 나오지 않는다. 이산량의 등분할은 3-나 단계에서 제시되고 있다. 이에 대하여 연속량과 이산량 중 특정 예시만 제시될 경우 학생들의 분수 개념은 제한될 수 밖에 없기 때문에 이산량과 연속량을 함께 다루자는 의견과 이산량의 등분할을 연속량의 등분할에 비해 학생들이 어려워하기 때문에 이산량을 더 늦게 다루자는 의견이 분분하다. 도입 시기에 대해서는 더 많은 연구가 필요하다. 본 연구에서는 5학년 학생을 대상으로 이미 연속량과 이산량의 등분할에 대해 학습한 이후이므로 두 가지를 함께 제시하여 지도하도록 하겠다.

3) 다양한 분할 활동하기

연속량이나 이산량으로 크기가 같은 묶음이나 조각으로 분할할 수 있어야 분수의 전체-부분 의미 해석이 가능하다. 학교 수업에서 분할활동은 이미 분할되어 있는 연속량이 대부분이며 대부분 그래픽 형태로 제시되기 때문에 학생들이 조작해볼 기회를 갖기가 쉽지 않다. 분수 개념에 대한 이해가 제한적일 수 밖에 없다. 그러므로 학생들은 다양한 형태의 모델(구체물, 그림, 수직선 등)을 이용하여 직접 분할하는 활동을 해보아야 한다. 분수 개념을 처음 학생들에게 소개할 때에는 구체물을 가지고 직접 분할하는 활동을 해보게 해야 한다. 실생활에서 친숙한 구체물을 사용하되 똑같이 나눈다는 분할 활동에 적절한 구체물을 활용한 조작활동을 해야 하겠다.

나. 분수의 양적 개념

분수의 양적 개념 즉 분수의 크기에 대한 인식은 분수의 크기비교, 동치분수, 어림 기능이 통합되어 발달한다. 교과서에서는 동치분수에 대한 것은 제시하고 있으나 어림 기능은 제대로 다루고 있지 않다. 분수의 양적 개념 즉 분수의 크기에 대한 인식은 매우 중요하다. 분수의 양적 개념이 잘 형성되어 있으면 분수의 상대적 크기를 어렵하여 동치분수를 알고, 수직

선에서 분수의 위치를 나타낼 수 있으며 분수 연산의 결과를 예측할 수 있다. 김형조(2006)는 분수에 대한 양적 사고의 개발은 분수 연산의 선행요건일 뿐 아니라 분수 수업에서 전반적으로 강화되어야 할 부분이라고 지적한다.

다. 동치분수

동치분수는 분수의 크기 비교 뿐 아니라 나중에 하게 될 분수의 연산에서도 중요하다. 분수의 연산을 하기 위해서는 크기가 같은 분수 즉 동치분수를 나타낼 수 있어야 한다. 동치분수를 만드는 구체적인 형태는 약분과 통분의 두 가지가 있다. 공약수와 공배수에 대한 이해를 바탕으로 크기가 같은 분수를 만들 수 있는데 이를 익혀 약분과 통분을 할 수 있게 되고 분모가 다른 분수는 통분을 통해 분모가 같은 분수로 고쳐 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 된다. 분수의 덧셈과 뺄셈에서 더해지거나 빼지는 단위가 분모에 의해 결정되고 같은 단위에서 더하고 빼야 하기 때문에, 특히 동치분수에 대한 이해는 더욱 필요하다(김형조, 2006, p. 18). 학생들에게 기초 알고리즘을 가르치기 전에 동치 분수의 개념과 동치 분수의 생성 방법을 스스로 찾도록 해야 한다. 학생들은 단위가 무엇인지 잘 찾지는 못하더라도 크기가 같은 단위로 더하거나 빼야 한다는 것을 먼저 깨달아야 한다. 단위 통일의 필요성을 인지했을 때 공통된 분모가 필요하다는 것을 알게 되고 이 때 스스로 분수 덧셈과 뺄셈의 알고리즘을 찾아내며 왜 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 더하거나 뺄 수 없는 지를 이해할 수 있다. 김경미, 황우형(2009)은 분수의 덧셈을 하기 위해서는 기본적으로 분수의 개념을 이해하고, 단위, 단위화, 분할, 전체-부분 관계와 같은 개념들을 이해하고 있어야 한다고 주장한다. 특히 이분모 분수의 덧셈 같은 경우 같은 단위에서 더하고 빼야 하기 때문에 동치분수에 대한 이해가 수반되어야 하며 또한 아동들이 공통분모의 필요성을 스스로 인식하여야 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 알고리즘을 이해할 수 있으며 분수의 덧셈에서 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 더하는 전형적인 계산상의 오류를 범하지 않을 수 있다.

라. 비형식적 지식

고상숙 외(2003)에 의하면 학생들은 분수 개념을 학습하기 전에, 일상생활에서 분수에 대한 직관적이고 비형식적인 경험을 가지고 있음에도 불구하고 분수로 표현하는데 많은 어려움을 가지며 분수를 실생활 문제와 관련해서 이해할 수 없는 것으로 생각한다고 말하며 학생으로 하여금 분수 개념에 대하여 더 잘 이해할 수 있도록 도움 방법을 Skemp의 이론에서 찾아 다음과 같이 제안한다.

첫째, 분수 개념을 도입할 때, 실생활에서 접할 수 있는 다양한 구체물을 다루는 학습 경험을 제공해야 한다. 다양한 경험 속에서 예와 반례를 선택하여 제시함으로써 학생들 스스로 개념을 추상화할 수 있도록 해야 한다. 먼저, 일정한 단위로 구체물을 자연수 배로 계산하고 남는 부분이 있어 더 작은 단위가 필요함을 느끼게 하고, 그로부터 분수의 필요성을 인식시켜야 한다. 이 때 구체물은 이산량 뿐만 아니라 연속량도 함께 제시해야 하며, 단위의 크기를 달리하여 제시해야 한다. 둘째, 학생들이 구체물을 다루는 직접 경험을 통해 스스로 분수 개념을 구성한 후 각자의 경험에 대하여 학생들끼리 토의나 의사소통을 통하여 스키마를 구성하도록 해야 한다. 셋째, 학생들에게 수학적 개념에 대한 형식적 표현인 언어-대수적 기호체계, 즉 분수로 표현하기 전에 비형식적이고 과도기적인 시각적 기호체계로 표현할

충분한 기회를 제공해야 한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 설계

본 연구의 목적은 수학학습부진아에게 분수 개념 학습 프로그램을 투입한 후 분수의 개념적 이해가 되면 분수의 덧셈 능력으로 전이가 발생하는지 여부를 분석하는 것이다. 이를 위해 본 연구에서는 훈련연구 방법을 선택하였다. 훈련 연구는 학생들에게 목표과제 즉 상위기능의 선행요건으로 가정된 하위기능에 대한 훈련을 시키되 상위 기능 자체는 가르치지 않는다. 그 후에 학생들은 목표 과제에 대한 수행능력 검사와 프로그램에서 가르쳐진 각각의 하위기능에 대한 검사를 받는다. 검사 결과는 통과일 경우 '+', 실패일 경우 '-'로 표시하여 <그림Ⅲ-1>과 같은 경우로 나타날 수 있다. 하위기능이 통과(+)이고 상위기능이 통과(+)이면 하위기능에서부터 상위기능으로 전이가 일어났다고 해석할 수 있다.

상위기능	하위기능	의 미
+	+	위계에서 예상되었던 것처럼, 하위기능에서부터 상위기능으로 전이가 일어났다.
-	-	위계에서 예상되었던 것과 같은 전이가 일어나지 않았다.
+	-	상위기능에 대한 학습은 처음의 하위기능의 학습 없이는 불가능하다는 예상과는 반대되었다.
-	+	위계의 예상과는 반대되지 않지만, 학습 프로그램이 미약했다.

<그림Ⅲ-1> 학습위계에서 기능들의 쌍들에 대한 점수들간의 가능한 관계
(Gagne et al., 1962 ; 구광조 외, 2007, 재인용)

2. 연구 절차

가. 연구 대상자 선정

1) 분수 개념 사전 검사

분수 개념 사전 검사지는 김형조(2006)가 '분수 개념 이해 프로그램이 초등학교 수학 학습부진아의 분수개념 이해에 미치는 효과'에서 사용한 분수개념 검사지와 사전·사후 검사지를 부분적으로 사용하였다. 이 검사지는 분수의 곱셈, 나눗셈 문제도 함께 수록되어 있기 때문에 분수의 곱셈, 나눗셈 문제를 제외하고 본 연구의 목적에 부합하는 문제를 발췌하여 실시하였다.

2) 연구 대상자 선정

본 연구자의 학급은 수학 평균이 동학년 다른 학급에 비해 낮은 편으로 분수 개념 사전 검사 결과 평균이 47점이 나왔는데 이 점수는 분수 개념 사전 검사 문항 중 분수 덧셈 문항

4문항을 제외한 16문항의 정답률을 100점으로 환산한 점수다. 이에 40점 미만인 학생을 대상으로 하려 했으나 수학학습부진아의 특성상 여러 학생을 한꺼번에 가르치기는 힘들므로 19~31점에 해당하는 학생 6명을 대상으로 선정하였다. 2개 문항 즉 13점을 받은 학생은 기초학습부진아로 분수의 개념 습득에 큰 어려움을 보여 본 연구의 대상에서는 제외시켰다.

나. 분수 개념 지도

본 연구에서는 수학학습부진아에게 분수 개념을 지도하기 위하여 이진호(2003)의 ‘구체적 조작 활동을 통한 분수의 개념 지도’의 내용을 참고하였다. 이진호(2003)의 프로그램은 4학년 학생을 대상으로 분수의 개념 지도에 대한 내용이 충실히 되어 있어 기본적인 틀로 사용하되 분수의 연산 부분은 제외하였다. 이외에 등분할 부분은 수학 교과서와 선행연구의 내용을 참고하였고, 분수의 양적 개념 부분은 김형조(2006)의 ‘분수 개념 이해 프로그램이 초등학교 수학학습부진아의 분수 개념 이해에 미치는 효과’를 참고한 본 연구의 분수 개념 학습 프로그램의 기본 방향은 다음과 같이 설정하였다.

- ① 상징을 도입하기 전에 구체물이나 그림모델을 이용한 다양한 분할활동하기
- ② 자료는 연속량과 이산량을 함께 제시하기
- ③ 분수의 용어와 기호는 구체물과 연결시켜 도입하기
- ④ 분수의 양적 개념을 강조하여 지도하기
- ⑤ 개념 정착을 위한 충분한 연습 실시하기
- ⑥ 망각 방지를 위해 이전 학습내용을 주기적으로 반복하기

본 연구의 분수 개념 학습 프로그램의 내용은 다음과 같다.

1차시는 다양한 등분할 활동을 한다. 피자모형을 사용하여 생활주변에서 분수처럼 분할하는 경우를 생각하게 하여 수업을 시작한다. 연속량(색종이, 원모양 종이)와 이산량(바둑알), 수직선을 등분할 하는 활동을 해보고 생활에서 쓰고 있는 분수를 찾아보는 것으로 마무리한다.

2~3차시는 부분의 양을 전체의 양과 비교하여 분수를 나타낸다. 전 시간에 했던 등분할 활동을 복습해보고, 연속량(원분수), 이산량(바둑알)을 등분해보고 부분과 전체의 양을 언어로 표현한다. 분수 쓰기와 읽기를 약속하고 연습한다. 퀴즈네르 색막대, 바둑알을 이용하여 부분과 전체와의 관계를 분수로 나타내어 보고 수직선 위에 분수를 나타내어 본다. 수직선은 0~1수직선과 0~2수직선으로 구분하여 활동을 한다.

4차시는 분수 용어를 이해하는 활동을 한다. 분수의 분모와 분자를 알아본다. 다양한 분수를 분류해본 후, 단위분수, 진분수, 가분수, 대분수를 약속한다.

5~6차시는 분수의 크기를 비교해보고 동치분수를 찾는 활동을 한다. 동분모진분수와 단위분수의 크기를 원분수 교구를 활용하여 학습한다. 분수표를 이용하여 0, $\frac{1}{2}$, 1에 가까운 분수를 찾아보고 특성을 살펴본다. 원분수와 퀴즈네르 색막대를 이용하여 $\frac{1}{2}$, 1과 크기가 같은 분수를 찾아본다. 퀴즈네르 색막대를 이용하여 분수의 덧셈 결과를 어렵해본다.

학생들의 분수 이해도 선별 검사의 결과를 토대로 부족한 내용을 보충지도하며 전체적으로 부족할 경우 단계별로 지도한다. 방과 후 1차시(40분) 또는 연속차시일 경우 2차시를 지

도한다. 연구 대상자의 분수 개념 수준이 비슷하므로 6명 전체를 함께 지도한다.

분수 개념 학습 프로그램 재교육은 분수 개념 사후 검사 후 분수의 개념적 이해 정도가 낮은 경우에 한해 실시한다. 이 단계에서는 분수 개념 사후 검사지에서 틀린 문제를 중심으로 서로의 생각을 의사소통 하는 방식으로 프로그램을 운영한다.

다. 분수 개념 확인

연구 대상자에게 분수 개념 학습 프로그램 적용 후 다음날 분수 개념 사후 검사를 실시하였다. 검사지는 연구대상자를 선발하기 위해 사용한 분수 개념 사전 검사지와 동형의 문제로 제작하였다. 검사지의 동질성을 확보하기 위해 실험집단에 투입하기 전에 다른 학급에 투입했다. 본 연구자의 학급과 학기 초에 실시하는 교과학습 진단평가 결과 가장 유사한 수학 평균을 보인 다른 학급에 분수 개념 사전 검사지와 분수 개념 사후 검사지, 전이 효과 검사지 모두를 투입하였다. 각 문항별 정답을 맞춘 학생수를 비교하여 3명 이상 차이가 나는 문항은 수정·보완하였다.

라. 전이 효과 검증

전이 효과 검사는 분수 개념 지도 후 분수 덧셈에 대한 수행능력을 확인하는 검사이다. 본 연구에서는 검사지와 함께 수직선, 도형모델, 원분수, 종이띠 등 분수 개념을 학습할 때 사용하였던 교구를 제공하였다. 검사 시 비디오촬영을 하여 행동을 분석하고 검사지에서 이해 되지 않는 부분을 보충하기 위한 인터뷰를 실시하였다.

IV. 연구 결과

1. 분수의 개념적 이해 분석

가. 분수 학습 프로그램 투입 전 분수 개념 사전 검사 결과

분수 개념 진단 검사 결과를 분석해보면 다음과 같다.

- ① 분수 개념 사전 검사 결과 학급의 평균은 47점이었고 연구 대상자 6명의 평균은 25점으로 16개 문항 중 3~5개를 맞추어서 전반적으로 연구 대상자들의 분수의 개념적 이해 정도는 상당히 낮았다.
- ② 분수 양적 개념 이해 문항은 6개 중 4개는 6명 모두 틀렸고 2개 문항은 각 1명만 맞추는 등 분수 양적 개념의 이해도가 심각하게 떨어짐을 알 수 있었다.
- ③ 연구 대상자 6명 모두 1과 크기가 같은 분수를 찾는 동치분수 문항을 모두 맞추었다. 16문항 중 6명의 학생이 모두 맞춘 문항은 동치분수 문항이 유일하며, 동치분수를 찾는 다른 문항은 6명 중 2명만이 맞춘 것에 비하면 특이한 점이다.

나. 분수 학습 프로그램 투입 후 분수 개념 사후 검사 결과

분수 개념 사후 검사를 문항별로 분석한 결과는 다음과 같다.

- ① 수학교육부진아의 다수가 6차시의 분수 개념 학습 프로그램을 투입했음에도 분수의 개

념적 이해 정도가 낮았다. 수학학습부진아들에게 분수 개념을 습득하는 것은 어려운 것임을 알 수 있었다.

- ② 분수 개념 영역 중 분수 양적 개념 이해 영역은 분수 개념 학습 프로그램을 투입하기 전과 비교하여 여전히 정답률이 낮았다. 특히 정답률이 가장 낮은 문항은 분수 덧셈 어렵하기로 6명 전원이 오답을 썼다.
- ③ 연속량 문항 중에서 불완전한 단서가 제공된 경우보다 일치하지 않은 단서가 제공된 문제에서 정답률이 낮았으며, 차후에 이를 이해하는 데에는 많은 시간이 걸렸다.
- ④ 학생들은 분수의 크기를 수직선에 나타내는 것을 어려워하였다. 특히 0~2 수직선에서 분수를 나타낼 때 전체를 1로 인식하여 분수를 나타내는 오류를 범하는 경우가 많았으며 이러한 오류는 재교육을 한 후 다시 실시한 재시험에서도 나타나 쉽게 고쳐지지 않았다.
- ⑤ 분수의 양적 개념을 확인하는 문제와 동치분수를 찾아보는 문제에서 원분수를 그리면서 문제를 해결하는 학생들이 많았다.

재교육 후 실시한 분수 개념 사후 2차 검사의 결과를 분수 연산과 직접적으로 관계가 있는 전체-부분 관계 이해, 분수 양적 개념 이해, 동치분수 영역을 중심으로 살펴보면 다음과 같다.

1) 전체 - 부분 관계 이해

- ① 전체 - 부분 관계에 대한 이해도가 다른 영역에 비해 높은 편이었다.
- ② 불완전한 단서가 제공된 연속량의 전체 - 부분 개념 문항과 일치하지 않는 단서가 제공된 이산량의 전체-부분 개념 문항에서 전원 정답을 맞추었다.
- ③ 일치하지 않는 단서가 제공된 연속량의 전체-부분 개념 문항이 6명 중 4명만 맞추어 정답률이 이 영역에서는 가장 낮았다. 이 문항은 3등분되어있는 띠의 $\frac{3}{4}$ 을 나타내는 것으로 분수개념학습프로그램 투입 전과 후에도 정답률이 낮았다.

2) 분수 양적 개념 이해

- ① 분수 양적 개념에 대한 이해도가 다른 영역에 비해 가장 낮았다.
- ② 참고점에 가까운 수를 찾는 문항과 수의 상대적인 크기를 인식하는 문항이 6명 중 2명만 맞추어 분수 개념 사후 검사지 전체에서 정답률이 가장 낮았다.
- ③ 분수를 수직선에 나타내는 것을 어려워하였다. 수직선 전체가 1이 아니라 2로 되어 있음을 인식하지 못함으로 인해 오류가 발생했다.

3) 동치분수 이해

- ① 동치분수에 대한 이해도가 다른 영역에 비해 가장 높았다. 동치분수의 이해도가 높았던 원인으로 본 연구의 검사지의 동치분수 문항은 두 분모가 서로 2배인 배수 관계여서 학생들이 쉽게 해결할 수 있었던 것으로 생각된다.
- ② 동치분수의 문제를 해결할 때 학생들은 원모델로 분수를 나타낸 것을 볼 수 있는데 이처럼 원모델로 분수를 나타낼 수 있다는 것은 분수를 등분할 하여 나타낼 수 있음과 분수의 양적 개념을 어느 정도는 습득하였음을 알 수 있었다. 그리고 동치분수를 학습함에 있어 원모델 등의 그림이나 교구를 활용하는 것이 효과적이라는 것도 알 수 있었다.

2. 분수 덧셈 능력 분석

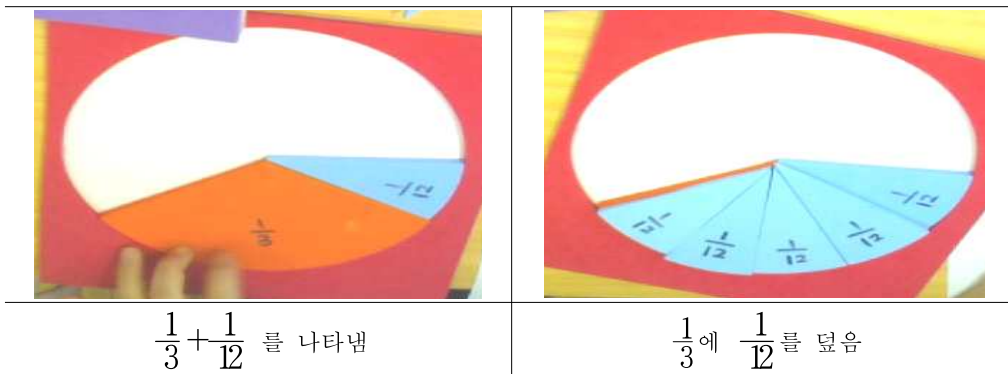
가. 분수 학습 프로그램 투입 전 분수 덧셈 진단 검사 결과

분수 개념 학습 프로그램을 투입하기 전에 분수 덧셈 연산 능력을 확인하기 위하여 연구 대상자로 선정한 학생들에게 분수 연산 능력 검사를 실시하였다. 문항은 전이 검사와 동형의 문제로 동분모 분수의 덧셈 2문항과 이분모 분수의 덧셈 2문항으로 구성하였다. 학생 1명을 제외한 모든 학생들이 동분모 분수 덧셈은 잘 해결하였다. 이분모 분수 덧셈문제는 몰라서 답을 쓰지 않은 학생이 1명 있었고 답을 쓴 학생들의 대부분은 분모끼리 합하고 분자끼리 합하는 형태로 문제를 해결하였다.

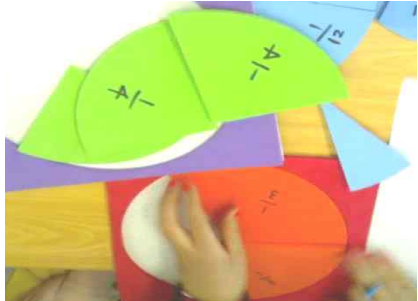
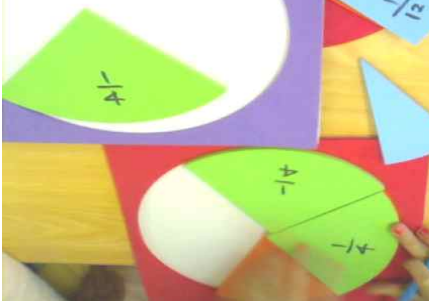
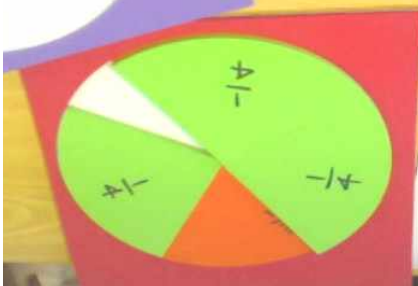
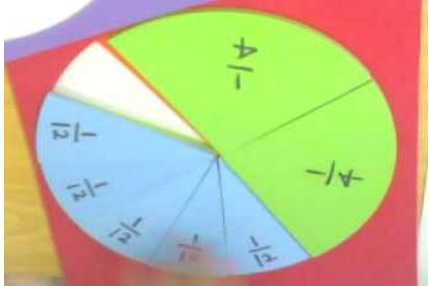
나. 분수 학습 프로그램 투입 후 분수 덧셈 전이 1차 검사 결과

분수 학습 프로그램 투입 후 분수 덧셈 전이 검사 결과는 다음과 같다.

- ① 6명의 학생 모두 동분모 분수의 덧셈을 정확하게 해결하였으며 교구를 이용하여 나타내고 문제 풀이 과정을 설명할 수 있었다.
- ② 동분모 분수의 덧셈은 분수 개념학습 이전에도 대부분의 학생들이 해결할 수 있었으므로 프로그램 투입 전과 후의 비교 분석이 의미가 없다.
- ③ 학생 B와 D는 분수 개념 학습 프로그램 투입 후 실시한 분수 개념 확인검사(1차)에서 100점 만점 중 69점과 63점으로 다른 학생들에 비해 성취도가 높았다. 이 학생들은 이분모 분수의 덧셈에서 분모가 다른 경우 두 분수조각을 덮을 수 있는 공통된 분수 조각을 찾아내어 문제를 해결하였다.



<그림 IV-1> 학생 B의 $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ 풀이 과정

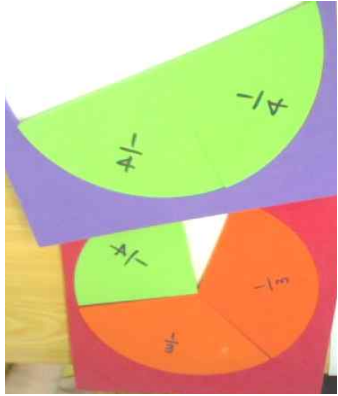

	
$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 계산을 위해 $\frac{2}{3}$ 를 놓음 \Rightarrow	$\frac{3}{4}$ 중 $\frac{2}{4}$ 를 $\frac{2}{3}$ 위에 덮음 \checkmark
	
$\frac{1}{4}$ 도 판에 넣음 \Rightarrow	남은 부분만 $\frac{1}{12}$ 조각으로 덮음 \checkmark
<p>4. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = 1\frac{5}{12}$</p>	
<p>검사지에 $1\frac{5}{12}$라고 씀</p>	

<그림IV-2> 학생 D의 $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 풀이 과정

교사 : 왜 그런지 자세하게 설명해줄래?
 학생 D : ($\frac{2}{3}$ 부분과 $\frac{2}{4}$ 가 겹쳐져 있는 부분을 가리키며)여기는 1이고, 나머지는 개수를 세어보면 $\frac{1}{12}$ 이 5개 있으니까 $\frac{5}{12}$ 예요.

<학생 D의 $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 풀이 과정 프로토콜>

- ⑤ 학생 B는 문제를 해결할 때 원분수 교구를 활용하여 해결을 하였는데 분모가 다른 분수 조각을 원판에 채운 후 남은 부분이 얼마인지 분수로 나타낼 수 있었다.

		$4. \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$ $\frac{1}{12} + \frac{6}{12} = \frac{17}{12}$
$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 을 나타냄	$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ 확인 모습	전이 효과 검사지

<그림 IV-3> 학생 B의 $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 풀이 과정

학생 B : ($\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 을 나타내기 위해 $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ 를 한 판에 나타내고 나머지 $\frac{2}{4}$ 를 다른 판에 나타냄)

학생 B : (전이 효과 검사지에 $\frac{11}{12} + \frac{6}{12} = \frac{17}{12}$ 를 씀)

교사 : 왜 $\frac{11}{12}$ 라고 썼니?

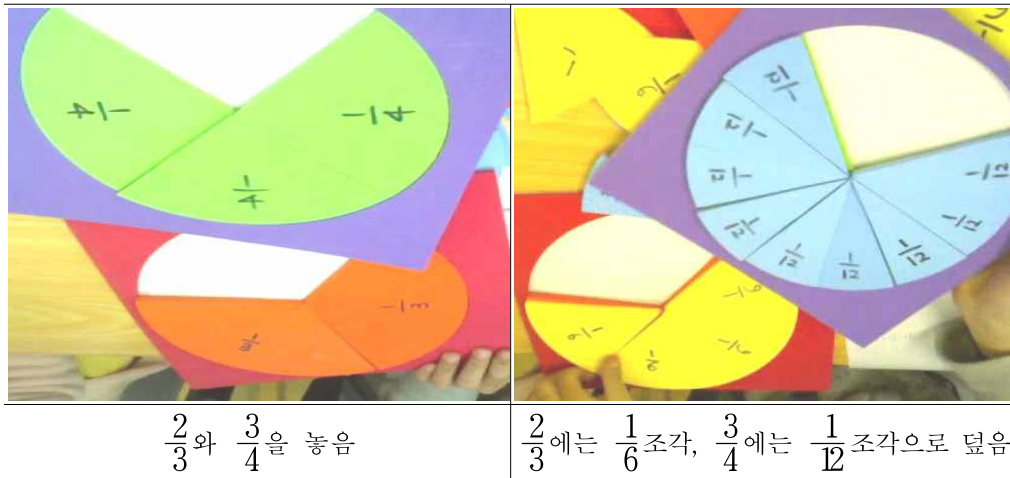
학생 B : ($\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ 를 한 판에 나타낸 것을 가리키며) 이렇게 하고 남은 부분이 $\frac{1}{12}$ 니까 애네들은 $\frac{11}{12}$ 예요.

교사 : 왜 $\frac{6}{12}$ 라고 썼니?

학생 B : $\frac{1}{4}$ 가 $\frac{3}{12}$ 이니까 다 하면 $\frac{6}{12}$ 이니까요.

<학생 B의 $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 풀이 과정 프로토콜>

- ⑥ 6명 중 학생 B와 D를 제외한 나머지 학생들은 여전히 이분모 분수의 덧셈문제는 분모끼리 더하고 분자끼리 더하는 방법으로 문제를 해결하였다. 학생들은 분모가 다르기 때문에 이렇게 계산한다고 설명하였다.
- ⑦ 6명 중 학생 B와 D를 제외한 나머지 학생들은 분모가 다르기 때문에 분모를 같게 해주어야 한다거나 공통된 분모를 만들어 주어야 계산할 수 있다는 생각은 하지 못하는 듯 했다. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 의 문제에서 $\frac{2}{3}$ 에는 $\frac{1}{6}$ 조각을, $\frac{3}{4}$ 에는 $\frac{1}{12}$ 조각을 덮는 등 이분모 분수의 조각위에 공통이 되는 분수 조각을 덮어야 하는데 서로 다른 분수 조각으로 덮는 행동을 보였다.



<그림 IV-4> 학생 E의 $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 풀이 과정

⑧ 6명 중 학생 B와 D를 제외한 나머지 학생들은 교사의 여러 번의 발문과 학생의 대답을 통해 이분모 분수를 계산할 수 있었으나 오랜 시간이 걸렸다.

다. 재교육 후 분수 덧셈 전이 2차 검사 결과

1시간의 재교육을 실시한 후 다시 분수 덧셈 전이도 사후 검사를 실시하였다. 2차 분수 덧셈 전이도 사후 검사에서는 이분모 덧셈 문항을 2개에서 8개로 늘려서 실시하였다. 연구대상 학생 6명이 모두 동분모 분수의 덧셈은 잘 해결하였으므로 이 문항은 제외하였고, 분수 덧셈 전이도 사후 1차 검사에서 이분모 분수의 문항의 난이도가 높았고 2문항밖에 없어서 전이 효과를 분석하기에 무리수가 있어서 문항을 수정하였다. 분수 덧셈 전이 2차 검사 결과를 종합하면 다음과 같다.

- ① 배수 관계가 명확한 단위분수의 합은 이분모 분수라 하더라도 해결할 수 있었다. 두 분모 사이에 배수 관계가 있는 문항의 정답률이 두 분모 사이 배수 관계가 아닌 문항의 정답률보다 높았다. 두 분모 사이에 배수 관계가 있을 때 분수를 교구나 그림모델로 나타내었을 때 보다 쉽게 공통분모를 찾았다.
- ② 이분모 단위분수의 덧셈 문제가 이분모 진분수의 덧셈 문제보다 정답률이 높았다. 진분수 문제는 공통분모는 찾아내었으나 분자 계산에서 오류가 잦았다. 이는 분수 개념 자체의 문제보다는 수감각에 문제가 있음을 알 수 있었다.
- ③ 공통분모가 커질수록 원모델로 등분할하는 과정에서 오류가 생겨서 정답률이 낮았다.
- ④ 수학학습부진아가 동치분수를 찾을 수 있다는 것이 이분모 분수의 덧셈을 계산할 수 있다는 것을 보장하지는 못한다. 분수 개념 사후 2차 검사에서 동치분수 영역의 2문항 모두 5명 전원이 정답을 맞추었음에도 불구하고 이분모 분수 덧셈을 모든 학생이 해결하지는 못하였다. 수학학습부진아는 동치분수에서 사용되는 분수의 개념을 습득하더라도 분수 연산에 적용하는 것이 자연스럽게 이루어지는 것은 아님을 알 수 있다.

3. 전이 효과 분석

가. 분수의 개념적 이해에서 분수 덧셈으로의 전이 여부 검증

본 연구에서 의도란 분수의 개념적 이해에서 분수 덧셈으로의 전이 여부를 알아보기 위해 연구결과를 정리하면 <그림 IV-5>와 같다. 학생 B와 D는 하위기능인 분수의 개념적 이해가 통과이고 상위기능인 분수 덧셈이 통과이므로 분수의 개념적 이해에서 분수 덧셈으로 전이가 일어났다고 해석할 수 있다. 학생 A, C, E, F는 하위기능인 분수의 개념적 이해에서 통과하지 못하였고 상위기능인 분수 덧셈도 통과하지 못하였으므로 예상했던 것과 같은 전이가 일어나지 않았다고 해석할 수 있다.

학생	상위기능	하위기능	의 미
	분수 덧셈 분수의 개념적 이해		
B, D	+	+	위계에서 예상되었던 것처럼, 하위기능에서부터 상위기능으로 전이가 일어났다.
A, C E, F	-	-	위계에서 예상되었던 것과 같은 전이가 일어나지 않았다.

<그림 IV-5> 분수의 개념적 이해에서 분수 덧셈으로의 전이 여부

나. 전이에 영향을 주는 요인 분석

본 연구에서 실시하였던 분수 개념 사후 검사는 6명 모두 해결할 수 있었지만 학교에서 실시한 1차 성취도평가에서는 학생 B와 D만이 동치분수 3문항을 모두 해결하였다. 분수 덧셈 전이 검사에서 분수 덧셈을 해결할 수 있었던 학생 B와 D만이 동치분수의 개념을 잘 이해하고 있다는 것을 알 수 있었다. 나머지 학생들이 분수 개념 사후 검사에서 동치분수 영역의 문항을 모두 맞추었으나 분수의 덧셈 전이 검사에서 분수 덧셈을 잘 해결하지 못한 이유는 첫째, 동치분수에 대한 개념이 확실히 자리 잡지 않았다는 점, 둘째, 배운 지식 즉 동치분수에 대한 지식을 분수 덧셈에 확대 적용하는 능력도 부족하다고 생각해 볼 수 있다. 이것으로 보아 분수의 덧셈을 해결하기 위해 동치분수의 이해가 수반되어야 한다는 선행연구 결과를 다시 한번 확인할 수 있었다.

4. 파지 효과 분석

본 연구에서 분수 개념지도, 분수 개념 확인, 전이 효과 검증을 실시한 후 연구대상자들은 일반 학생들과 함께 분수의 덧셈과 뺄셈 단원을 학습하였다. 단원의 학습이 끝난 후 학년에서 단원 평가를 실시하며 평가에서 60점 미만인 학생들은 보충지도를 받는다. 전이 효과 검증 1달 후 실시한 분수의 덧셈과 뺄셈 단원 평가의 결과를 살펴보면 학생 B와 D는 반평균

보다 높은 점수를 받았으며 학생 A와 F도 60점 이상을 받아 시험에서 통과하였다. 앞서 살펴본 바와 같이 학생 B와 D는 전이가 나타난 것으로 나타났으며 1달 후 실시한 분수의 덧셈과 뺄셈 단원 평가에서도 높은 점수를 받아 파지 효과도 있는 것으로 볼 수 있다.

특이한 점으로 학생 E는 분수 개념 사후 검사에서 학생 D와 동일한 점수가 나와 분수의 개념적 이해 정도가 높은 편이었는데 전이가 일어나지 않았고 파지 검사에서도 가장 낮은 점수가 나왔다. 이는 첫째, 학생 E는 분수 용어 이해 영역의 문제를 모두 맞추어 점수는 높지만 분수 양적 개념 이해 문항을 하나도 맞추지 못하였다. 즉, 분수 양적 개념이 형성되지 못하였다는 점이다. 둘째, 동치분수 문항을 3문제 중 1문제만 맞추어 동치분수의 개념적 이해 정도가 낮다는 것을 알 수 있다. 이로서 분수 개념에서 분수 덧셈으로 전이가 되기 위해서는 분수 개념 중에서 분수의 양적 개념과 동치분수에 대한 이해가 뒷받침되지 않으면 분수 덧셈으로 전이가 일어나기 힘들다는 것을 알 수 있었다.

V. 결론 및 제언

이상의 연구 결과를 통해 얻은 수학학습부진아의 전이 가능성에 대한 결론은 다음과 같다.

첫째, 수학학습부진아라 하더라도 분수의 개념적 이해가 바탕이 되면 분수의 덧셈 알고리즘을 학습하지 않아도 이분모 분수의 덧셈까지 해결할 수 있다. 연구 대상자 6명 중 분수 개념 사후 검사 결과가 상인 학생 2명은 분수 교구를 이용하여 이분모 분수의 덧셈 문제 대부분을 바르게 해결할 수 있었다. 반면 분수 개념 사후 검사 결과가 중 또는 하인 학생 4명은 이분모 분수의 덧셈 문제를 매우 제한적으로 수행할 수 있었다. 이러한 결과는 분수 개념을 잘 획득하면, 부진아라 할지라도 분수 연산의 원리를 스스로 깨우칠 가능성이 있음을 시사하는 것으로, 부진아의 수학 지도에 시사하는 바가 크다.

둘째, 분수 개념 가운데 수학학습부진아들에게 특히 취약한 부분은 분수의 양적 개념과 동치 분수이며, 이것에 대한 이해 정도가 이분모 분수의 덧셈 수행에 영향을 미치는 것으로 나타났다. 분수의 양적 개념은 분수의 대소 관계 파악하기, 수직선 위에 분수의 위치 나타내기 등과 관련된 것으로 분수 개념 학습 프로그램 투입 후에도 크게 개선되지 않았다. 동치분수는 분모가 2와 4, 혹은 3과 6처럼 두 배가 명백한 경우는 쉽게 구하였으나, 3과 9, 3과 12처럼 세 배 이상이 되거나 2와 3, 3과 4처럼 배수 관계가 아닌 경우는 쉽게 구하지 못하는 모습을 보였다. 이러한 점으로 미루어 볼 때, 부진아가 동치 분수를 학습함에 있어 분수의 개념적 어려움 뿐만 아니라 자연수 감각이나 비례적 추론 등의 결함이 문제를 일으킬 수 있다.

이상의 연구 결과가 수학교육 종사자들에게 시사하는 바는 수학학습부진아에게 분수를 지도할 때는 분수 연산 지도 보다 분수 개념 지도에 보다 큰 비중을 두는 것이 효율적이라는 것이다. 왜냐하면 그들도 개념을 제대로 파악하면, 절차에 내재된 원리를 스스로 파악할 힘을 가지고 있기 때문이다. 그러나 문제는 수학부진아들에게 개념적 이해를 획득하게 하는 것이 결코 쉬운 일이 아니라는 것이다. 본 연구에서 개발한 분수 개념 학습 프로그램은 6명의 소집단을 대상으로 다양한 교구를 활용하여 정규 교육과정 이외에 총 6차시를 운영하도

록 구성하였다. 그럼에도 불구하고 분수 개념 학습 이후 분수 개념 이해도 검사를 통과한 학생은 2명에 불과했다. 이는 수학교육부진아에게 있어 분수 개념은 분수 학습의 성패를 좌우하는 요인임에도 불구하고 쉽게 획득되지 않는다는 것을 의미한다. 이것은 수학교육부진아 대상 분수 교수-학습 프로그램 개발에 시사하는 바가 크다.

비록 본 연구에서 개발한 분수 개념 학습 프로그램이 수학교육부진아들에게 큰 성공을 안겨주지는 못했지만, 사후 검사 결과와 프로그램 참여 과정에서 나타난 학생들의 반응을 통해 수학교육부진아를 대상으로 한 분수 지도의 시사점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 분수학습에서 개념적 이해를 획득하는 일은 매우 중요하기 때문에, 분수 사칙 연산 학습에 들어가기 전에 분수 개념의 재정립이 반드시 필요하다. 일반적으로 분수 사칙 연산을 지도할 때, 절차나 법칙만을 기계적으로 따르게 하는 맹목적 연습이 위주가 되기 쉽다. 그러나 본 연구 결과에 의하면, 수학교육부진아에게도 분수 개념을 바탕으로 분수 연산으로의 전이가 일어날 가능성이 있을 뿐만 아니라 과지 효과도 좋았으므로, 분수 개념 습득에 보다 초점을 두고 지도하는 것이 좋다.

둘째, 분수 개념 가운데 수학교육부진아들에게 가장 취약한 부분은 분수의 양적 크기와 동치 분수로, 이들 개념에 문제가 있는 경우 분수 연산 수행능력이 낮았다. 그런데 이들 개념은 분수 학습 이전에 자연수 감각이나 구구단, 약수와 배수 관계의 파악, 비례적 추론 등의 능력을 요구하므로, 분수 개념 지도에 앞서 이러한 선행 개념과 기능들을 연마할 필요가 있다. 반면 진분수, 가분수, 단위 분수 등과 같은 분수 용어의 획득은 분수 연산 학습에 별다른 도움이 되지 않는 것으로 나타났다.

셋째, 수학교구는 수학교육부진아들이 분수 개념을 이해하는 데 중요한 역할을 하였으며, 여러 교구 가운데 특히 원분수 교구를 수학교육부진아들이 가장 선호하였다. 그러나 한 두 번의 조작 활동으로는 분수의 개념적 이해를 획득하기 어렵기 때문에, 다양한 문제와 반복학습을 통해 충분한 경험을 하도록 해야 한다.

끝으로 본 연구와 관련하여 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구에서는 분수 개념 습득을 위해 분수 개념 학습 프로그램을 6차시로 구성하였는데 6명의 연구 대상자 중 2명만이 분수의 개념적 이해에서 통과하였다. 본 연구에서 적용한 분수 개념 학습 프로그램은 다양한 선행연구를 바탕으로 재구성하여 개발하였으나 완전한 것은 아니며, 더 나은 교수·학습 자료를 만들기 위해서는 부분 수정되어야 할 것이다. 특히 수학교육부진아가 획득하기 어려웠던 분수 양적 개념과 동치분수 개념을 습득하기 위한 학습 내용이 보강되어야 할 것이다.

둘째, 본 연구에서는 분수 개념 이해도 검사를 통과한 2명의 수행능력을 통해 전이 가능성을 논하였으므로, 연구 결과를 수학교육부진아 전체에게 일반화하기에 많은 무리가 있다. 따라서 후속 연구에서는 연구 대상자의 수를 충분히 확보하여 보다 일반적인 결론을 이끌어 내길 희망한다.

셋째, 본 연구는 분수의 개념적 이해에서 분수 덧셈으로의 전이 가능성을 살펴보았으므로 이 연구를 바탕으로 분수의 곱셈, 나눗셈 등의 연산 영역에 대해서도 전이 가능성이 있는지 후속 연구가 요구된다.