

이산미분기하 기반의 동적 비누막 모델

박민기*, 김현수*, 최한균*, 이승주*, 고광희*, 이관행*
*광주과학기술원 기전공학과
e-mail : minkp@gist.ac.kr

Dynamic Soap Film Model based on Discrete Differential Geometry

Min Ki Park*, Hyun Soo Kim*, Han Kyun Choi*, Seung Joo Lee*, Kwang Hee Ko*, Kwan H. Lee*
*Dept. of Mechatronics, Gwangju Institute of Science and Technology

요 약

주어진 경계선에 대해 비누막이 생성하는 표면 모델링 및 시간에 따른 변형 시뮬레이션은 컴퓨터 그래픽스 응용 프로그램의 한 분야이다. 이 문제에 대한 이전의 연구들은 주로 기하적인 방법들을 이용하였기 때문에 물리적으로 정확한 변형을 다루지 못하였다. 본 연구에서는 정확한 기하를 바탕으로 물리 기반 변형을 다루기 위해 이산미분기하학으로부터 비누막의 동적인 모델을 제안한다. 우선, 비누 성분의 물리적인 특성들을 고려한 에너지 모델을 정의하고, 이를 이산 영역에서 나타내기 위해 이산미분기하 및 이산화 기법들을 이용한다. 제안하는 모델은 평형 상태에서의 비누막 형상뿐만 아니라 외력에 대한 표면의 변형까지 정확하게 나타내며, 실시간 시뮬레이션이 가능하여 게임, 애니메이션 목적으로 활용될 수 있다.

1. 서론

컴퓨터 그래픽스 분야의 다양한 이슈 중에서 자연 현상들에 대한 물리 기반 모델링은 현재 활발한 연구가 진행되는 분야이다. 물리법칙을 따르는 자연 현상들을 이산자료를 다루는 컴퓨터 공간에서 나타내는 것은 쉽지 않다. 실제 현상들과 가장 가까운 모델을 제안하기 위해서 연속적인 영역에서 정의되는 값들을 이산 요소들로 표현하는 다양한 이산화(discretization) 방법들이 제안 되었다. 대표적인 예로 유한요소법, 유한차분법, 질점-스프링 시스템 등이 있다. 또한 최근에 이산미분기하학(discrete differential geometry)은 기하적으로 더 정확한 근사를 위해 컴퓨터 그래픽스 분야에서 유체 시뮬레이션[4] 및 변형체의 시뮬레이션 [3,10] 등에 널리 적용되고 있다.

이 논문에서는 다양한 흥미로운 자연 현상들 중에서 외관적으로는 심미적인 형상을 가지면서도, 복잡한 내부 구조와 원리를 가지고 있는 비누막의 변형을 다룬다. 주어진 다양한 경계선에 대해서 생성되는 비누막을 모델링 하는 문제는 최소의 면적을 가지는 표면을 모델링 하는 것과 같은 문제이다. ‘Minimal surface’ 모델링 (또는 Plateau 문제) 이라고 불리는 이 문제는 오랫동안 많은 연구가 진행되었는데, 비누막의 형상을 모델링 하는 문제에 적용할 수 있다. 하지만 표면 재질의 물리적 특성들을 고려하지 않았기 때문에, 외력으로 발생하는 동적인 형상 변형을 표현할 수 없다. 따라서 우리는 주위 환경의 영향을 받아서 변형되는 비누막을 나타내기 위해, 비누막의 에너지 기반 동적 모델을 제안한다. 우선, 질점-스프링 시스템

을 사용하여 비누막 표면을 삼각 메쉬로 나타내고, 물리 기반 시뮬레이션을 위해서 표면 에너지를 정의한다. 그 후, 이산미분기하 연산자를 사용하여 에너지를 이산화하여 비누막의 움직임을 시뮬레이션 한다. 제안하는 방법의 장점은 다음과 같다.

- 제안하는 모델은 정적인 비누막뿐만 아니라 동적인 변형까지 나타낼 수 있다. 물리 기반 에너지를 이산화 하여, 실제 비누막의 성질을 잘 나타낸다.
- 구현이 쉽고 애니메이션 목적으로 실시간 시뮬레이션이 가능하다.

논문의 구성은 다음과 같다. 2 장에서는 관련된 이전 연구들에 대해 간단하게 살펴보고, 3 장에서는 이산미분기하에 대한 이론적 배경들에 대해서 설명한다. 4 장에서는 제안하는 모델을, 5 장에서는 결과를 보이고 6 장에서 결론을 기술한다.

2. 관련연구

컴퓨터 그래픽스에서 변형체의 동적 시뮬레이션을 위해 이산미분기하를 이용한 접근법과 다양한 에너지 함수들이 제안되었다. 옷감, 모자, 종이 등과 같은 얇은 판 구조의 물체를 나타내기 위해서 ‘thin shell’ 모델이 제안되었다 [1,2,5]. 이 모델은 이산미분기하를 이용하여 두 가지 에너지 함수인 스트레칭(늘어남)을 나타내는 membrane 에너지와 벤딩(굽힘)을 나타내는

flexural 에너지를 정의하여 변형을 표현함으로써 복잡한 역학을 사용하지 않고 변형을 나타내었다. 본 연구에서 다루는 비누막은 ‘thin shell’ 모델과 기하적, 위상적으로 유사한 형태를 띠지만, 표면 재질의 성질은 전혀 다르기 때문에 다른 원리에 의해 변형이 이루어진다. 복잡한 성질을 가지고 있는 비누막 표면을 간단하게 나타내기 위해 수학과 기하학을 결합한 노력들이 진행되었다.

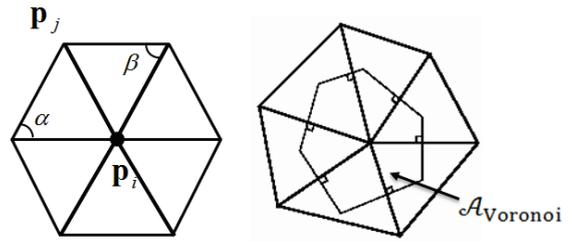
비누막과 같은 심미적인 표면에 대한 연구는 오래전부터 건축학 및 수학자들의 주된 관심사였다. 수학적으로 비누막 모델링은 ‘minimal surface’를 모델링하는 것과 같은 문제이다. 많은 연구자들은 이 문제를 기하처리 및 에너지 함수를 사용하여 해결하였다. [6]에서 Desbrun 은 평균곡률 흐름(mean curvature flow)을 이용하여 불규칙적인 표면을 개선(fairing) 하였으며, [1,7,8,9]에서 일그러진 표면을 부드럽게 만들기 위해 여러 가지 기하 에너지들을 최소화 하는 방법들이 제안되었다. 표 1 은 기하 모델링과 물리 시뮬레이션에 응용되는 여러 가지 에너지 함수들을 보여주고 있다. 그러나 대부분의 기존 연구들은 물리 기반의 변형보다는 정적인 모델링에 초점을 맞추고 있다. 따라서 동적인 비누막을 표현하기 위해서 새로운 방법이 필요하다.

<표 1> 여러 가지 에너지 함수들

Energy	Formulation	Application
Thin shell Energy [1]	$E_E = E_M + E_B$ where $E_M = \sum_i^{edges} k_M (e_i - \bar{e}_i)^2$ $E_B = \sum_i^{edges} k_B (\theta_i - \bar{\theta}_i)^2 \frac{ e_i }{h_i}$	Physical simulation of thin flexible structures
Willmore Energy [8]	$E_W = \int_{\Omega} (\kappa_H^2 - \kappa_G) dA$	Theory of surfaces, Geometric modeling, Physical simulation
Curvature Energy [7]	$E_C = \int_{\Omega} (\kappa_{max}^2 + \kappa_{min}^2) dA$	Surface fairing
Dirichlet Energy [9]	$E_D = \frac{1}{8} \sum_i^{points} \sum_{j \in N(i)} \omega_{ij} p_i - p_j ^2$ where $\omega_{ij} = \cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}$	Geometric modeling

3. 이산미분기하학

연속영역에서 표현되는 물체, 수치, 함수들을 이산 데이터를 다루는 컴퓨터에서 표현하거나 계산할 수 있도록 변환하는 것을 이산화(discretization)라고 한다. 이 장에서는 실제 부드러운 곡면을 삼각 메쉬로 표현하는 표면 이산화와 대표적인 곡면 수치 값인 이산 곡률에 대해 기술한다.



(그림 1) 삼각메쉬(왼쪽)와 보로노이 영역(오른쪽)

3.1. 표면 이산화

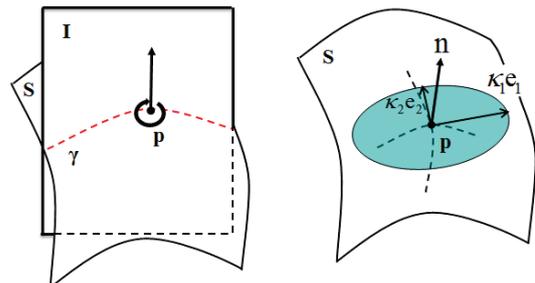
부드러운 곡면을 삼각 메쉬로 표현하기 위해서 질점-스프링 시스템을 사용하여 각 정점을 동일한 질량을 가진 파티클로, 각 모서리는 파티클을 연결하는 스프링으로 표현한다. 이를 통해 표면 상의 각 수치들(넓이, 곡률, 색상 등)이 정점으로 대표되는 위치에 각각 저장된다. DEC(discrete exterior calculus)는 한 정점이 표현하고 있는 영역을 나타내기 위한 이산화 방법을 제시해준다[11]. [11]에서 3 차원 정점에 대한 듀얼 셀(dual cell)은 정점 주위의 보로노이 영역(Voronoi region)임을 증명하였다. 즉, 그림 1 과 같이 정점 p 는 그 주위 보로노이 영역에 있는 모든 값들을 저장하고 있다. 우리는 이러한 특성으로부터 모든 정점에서의 수치 값들을 더함으로써 전체 표면에 대한 값들을 계산할 수 있다.

3.2. 평균 곡률 노멀 연산자

미분기하학에서 평균 곡률(mean curvature)은 그림 2 와 같이 주 곡률(principal curvature) e_1, e_2 의 평균으로 나타낼 수 있다. 오일러-라그랑주 방정식 (Euler Lagrange equation)은 평균 곡률과 면적의 관계를 말해주는 데, 최소 면적을 가지는 표면은 모든 지점에서 평균 곡률이 0 이 된다[12]. 이 사실로부터 평균 곡률 κ_H 와 면적 \mathcal{A} 의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$2\kappa_H \mathbf{n} = \lim_{\mathcal{A} \rightarrow 0} \frac{\nabla \mathcal{A}}{\mathcal{A}} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{n} 은 단위노멀 벡터, ∇ 는 (x,y,z) 좌표계에 대한 기울기(gradient)를 나타낸다. 위 식에서 $2\kappa_H \mathbf{n}$ 을 평균 곡률 노멀 연산자(mean curvature normal operator) 또는 라플라스-벨트라미 연산자(Laplace-Beltrami operator)라 하며, Δ_B 으로 나타낸다.



(그림 2) 표면 S의 주 곡률(principal curvature)

4. 동적 비누막 모델

제안하는 모델의 움직임은 변형으로 생성되는 에너지 E 에 대해 다음 운동방정식으로 표현이 된다.

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}^{-1}(\nabla E(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_{\text{ext}}) \quad (2)$$

여기서 \mathbf{x} 는 위치 벡터, \mathbf{M} 은 질량 행렬, \mathbf{f}_{ext} 는 표면에 작용하는 외력을 뜻한다. 결국 시간에 따른 움직임을 시뮬레이션 하기 위해서는 비누막 표면이 가지고 있는 에너지를 계산해야 한다.

4.1. 표면 에너지

탄성체의 변형을 나타내는 에너지는 크게 스트레칭, 트위스팅(꼬임), 벤딩, 표면장력 에너지로 나타낼 수 있다. 여기서 우리가 다루고자 하는 비누막의 변형에 트위스팅, 벤딩 에너지는 그 영향력이 매우 작아서 무시할 수 있다고 가정한다. 따라서, 비누막의 표면 에너지는 길이의 증가에 저항하는 스트레칭 에너지와 넓이의 증가에 저항하는 표면장력 에너지의 합으로 표현된다. 각각의 에너지에 대해서 자세하게 살펴보자.

비누막을 비롯한 모든 액체 성분은 표면장력 (surface tension)이라고 하는 특징을 가지는데, 이는 액체 표면 상에서 임의의 선을 따라 작용하는 분자간 인력의 단위 길이당 강도를 뜻하며, 단위는 N/m 으로 표현된다. 변형이 발생하여 표면적이 증가하면 더 많은 분자들의 인력의 작용으로 표면적이 최소화 된다. 표면 장력 σ 는 단위면적당 에너지로 표현 되므로 표면적 A 인 비누막 표면이 가지고 있는 에너지는 다음과 같다.

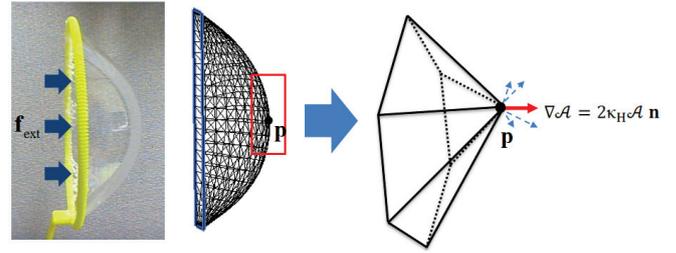
$$E_{\text{surface tension}} = \int_0^A \sigma dA \quad (3)$$

$E_{\text{surface tension}}$ 는 표면장력 에너지라고 불리며, 변형된 표면을 평형상태가 될 때까지 면적을 줄이는 내부 힘을 발생시킨다. 연속적인 영역에서 정의되는 위 에너지를 이산화 하기 위해 보로노이 영역의 성질을 이용하면, 표면적 A 는 모든 정점에서의 보로노이 영역의 합으로 나타낼 수 있다. 즉, 전체 비누막 표면에 대한 에너지는 다음과 같이 모든 정점에서의 에너지의 합으로 표현된다.

$$E_{\text{surface tension}} = \sum_{v \in S} \sigma \mathcal{A}_{\text{Voronoi}}(v) \quad (4)$$

다음으로 고려해야 할 에너지는 두 정점(파티클)이 서로 잡아 당기는 스트레칭 에너지이다. 이 에너지는 두 파티클을 연결하는 스프링의 탄성계수와 늘어난 길이의 제곱에 비례한다. 따라서 스트레칭 에너지는

$$E_{\text{stretching}} = \sum_{e \in S} \frac{1}{2} k_e (|e| - |e^0|)^2 \quad (5)$$



(그림 3) 변형된 비누막 표면과 넓이의 기울기

로 표현되며, 여기서 k_e 는 스프링의 탄성계수, $|e|$, $|e^0|$ 는 각각 변형된 상태와 초기 상태의 스프링의 길이이다.

4.2. 동적 시뮬레이션

외부 힘으로 인한 변형은 에너지를 증가 시키고 증가한 에너지는 변형에 저항하는 내부적인 힘을 발생시킨다. 매 순간 비누막의 모양을 결정하기 위해 식 (2)를 풀어야 하는데, 우리는 ∇E 를 구하기 위해 이산미분기하 연산자를 이용한다. 표면 에너지는 넓이에 비례하는 스칼라 함수 이므로 넓이의 최대 감소 기울기가 에너지로부터 발생하는 내부 힘 $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{x}) = -\nabla E(\mathbf{x})$ 이 된다. 식 (1)의 이산 평균 노멀 연산자 Δ_B 의 정의로부터 그림 3 과 같이 넓이의 최대 감소 기울기 $\nabla \mathcal{A}$ 는 평균 곡률 노멀 \mathbf{n} 의 방향을 가지고 넓이 \mathcal{A} 와 평균 곡률 κ_H 의 곱에 비례하는 벡터임을 알 수 있다. 따라서 내부 힘 \mathbf{f}_{int} 는

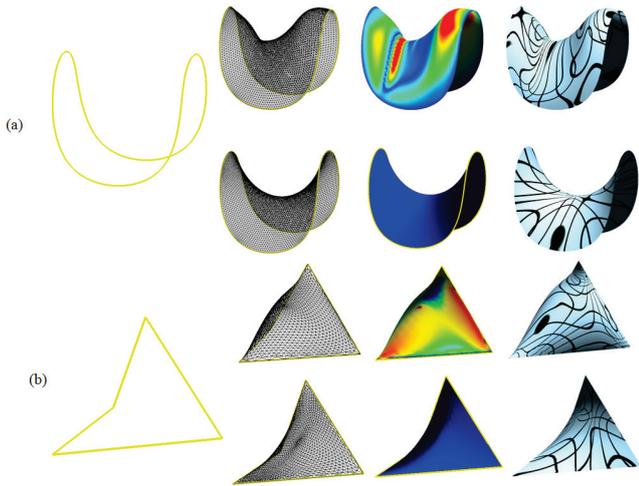
$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{x}) = -2\sigma \mathcal{A}_{\text{Voronoi}} \kappa_H \mathbf{n} - \sum_{e \in N^e(\mathbf{x})} k_e (|e| - |e^0|) \quad (6)$$

이며, 여기서 $N^e(\mathbf{x})$ 는 정점 \mathbf{x} 의 인접하는 정점들의 집합이다.

5. 결과

본 논문은 비누막 표면의 재질을 고려한 사실적인 렌더링 보다 기하 구조에 초점을 맞추고 있기 때문에, 결과를 곡률 맵(curvature map)으로 표현하거나, POV-Ray를 사용 하여 렌더링 하였다.

그림 4는 말 안장(saddle)과 사면체 형태의 경계선에 대해 생성된 비누막 결과이다. 가장 왼쪽의 노랑 곡선이 경계선이며, 오른쪽의 세가지 그림은 각각 변형된 형상(위)과 평형 상태에서의 형상(아래)을 와이어 프레임(wireframe), 곡률 맵, 곡률 흐름선(curvature flow)으로 나타낸 것이다. 표 1에서 볼 수 있듯이 변형에 따라 표면적, 표면 에너지, 평균 곡률은 증가한다. 또한 반복적인 실험 결과 표면 장력에 비해 스트레칭 에너지가 변형에 미치는 영향은 매우 작았다.

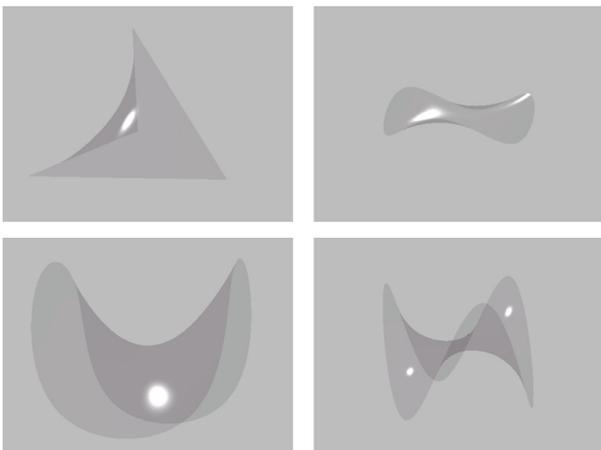


(그림 4) 다른 경계선에 대해서 생성된 비누막 구조 (a) 말 안장 (b) 사면체. 변형(위) 및 평형 상태(아래)의 형상을 와이어프레임(왼쪽) 곡률 맵(가운데) 곡률 흐름선(오른쪽)으로 나타낸 결과

<표 2> 그림 4 결과의 수치 데이터

Input model (# of faces)		area	surface energy	max mean curvature
Saddle (8192)	Deformed	7.94	15.11	5.179
	Undeformed	7.27	13.10	0.031
Tetrahe dron (2296)	Deformed	3.11	5.85	14.984
	Undeformed	2.78	5.00	0.001

그림 5 는 다양한 경계선에 대해 생성된 비누막 결과 이미지를 렌더링 하여 나타내었다. 제안하는 모델은 평형 상태에서는 기존의 ‘minimal surface’ 모델링 문제를 해결한다.



(그림 5) 렌더링 된 평형상태의 비누막 이미지

6. 결론 및 향후연구

본 연구에서는 기존의 정적 비누막뿐만 아니라 동적인 움직임까지 표현할 수 있는 새로운 비누막 모델을 제안하였다. 제안하는 모델은 비누막의 변형 모델을 물리적, 수학적으로 정의된 에너지로 표현한 첫

번째 시도이다. 또한 이산미분기하학을 기반으로 하여 제안하는 에너지의 이산화를 통해 컴퓨터 그래픽스에 적합한 모델을 유도하였다. 따라서 제안하는 모델은 복잡한 계산 없이 비누막의 특성을 잘 나타낼 수 있다.

본 연구는 컴퓨터 애니메이션에서 사용될 수 있는 비누막이나 비눗방울의 물리 모델을 제안했다는 점에 의미가 있다. 향후 비눗방울 생성 및 미세 진동까지 표현할 수 있는 모델에 대한 연구를 진행할 것이다.

감사의 글

이 논문은 2009 년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단(No. 20090083091)과 지식경제부 및 정보통신 산업진흥원의 대학 IT 연구센터(NIPA-2010-(C1090-1011-0003))의 지원을 받아 수행된 연구임.

참고문헌

- [1] Eitan Grinspun., Anil N. Hirani., Mathieu Desbrun and Peter Schröder., “Discrete shells”, In ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation., 2003, pp.62-67.
- [2] E. Grinspun, “A discrete model of thin shells”, ACM SIGGRAPH 2006 course, Discrete differential geometry: an applied introduction, pp.14-19, 2006.
- [3] Eitan Grinspun and Adrian Secord. “Introduction to Discrete Differential Geometry: The Geometry of Plane Curves”, ACM SIGGRAPH ASIA Course Note, 2008.
- [4] S. Elcott, Y. Tong, E. Kanso, P. Schroder and M. Desbrun. “Stable, circulation-preserving, simplicial fluids”, ACM Transactions on Graphics, Vol.26, 1, No.4, 2007.
- [5] Max Wardetzky, Miklos Bergou, David Harmon, Denis Zorin and Eitan Grinspun. “Discrete Quadratic Curvature Energies”, Computer Aided Geometric Design (CAGD) 24, 2007, pp. 499-518.
- [6] Mathieu. Desbrun, Mark Meyer, Peter Schröder, and Alan H. Barr., “Implicit Fairing of Irregular Meshes using Diffusion and Curvature Flow”, SIGGRAPH 99 Conf. Proc., pp317-324, 1999
- [7] L. Hsu., R. Kusner and J. Sullivan., “Minimizing the squared mean curvature integral for surfaces in space forms”, Experiment. Math., 1, 1992, pp.191-207.
- [8] A. I. Bobenko and Peter Schröder. “Discrete Willmore flow”, In Siggraph / Eurographics Symposium. Geom. Processing., 2005, pp.141-165.
- [9] Pinkall. U., Polthier. K., “Computing discrete minimal surfaces and their conjugates”, Experim. Math., 2, 1993, pp.15-36.
- [10] M. Bergou., M. Wardetzky., S. Robinson., B. Audoly., and E. Grinspun. “Discrete Elastic Rods”, ACM Transactions on Graphics, SIGGRAPH, 2008
- [11] Anil N. Hirani., “Discrete Exterior Calculus”, Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 2003.
- [12] M. Giaquinta and S. Hildebrandt., “Calculus of Variations I”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.