

스타 그래프, 버블정렬 그래프와 팬케익 그래프 사이의 임베딩(embedding) 알고리즘

김동완*, 민준식**, 이형옥*
*순천대학교 컴퓨터교육과
**경동대학교 IT공학부

e-mail:(wandong, oklee)@scnu.ac.kr, jsmin@kl.ac.kr

Embedding Algorithm for Star, Bubblesort, Pancake Graphs

Dong-Wan Kim*, Jun-Sik Min**, Hyeong-Ok Lee*

*Dept of Computer Education, Sunchon National University

**Dept of IT Engineering, Kyung-Dong University

요 약

스타 그래프, 버블정렬 그래프, 팬케익 그래프는 노드 대칭성(node symmetric), 최대 고장 허용도(maximum fault tolerance), 계층적 분할 성질을 갖고, 하이퍼큐브보다 망비용이 개선된 상호 연결망이다. 본 연구에서는 상호연결망으로 널리 알려진 스타 그래프와 그의 변형된 그래프들 사이의 임베딩 방법을 제안하고, 임베딩 비용을 분석한다. 임베딩 결과는 버블정렬 그래프는 스타 그래프에 연장을(dilation) 3, 스타그래프는 팬케익 그래프에 연장을 4로 각각 임베딩 가능하다.

1. 서론

병렬컴퓨터는 크게 공유 기억 장치를 갖는 다중프로세서(multi-processor) 시스템과 분산 기억 장치를 사용하는 다중컴퓨터(multi-computer) 시스템으로 분류한다[6]. 다중컴퓨터 시스템은 각각의 프로세서들이 자신의 기억 장치를 갖고 각 프로세서는 상호 연결망에 의해 연결되어 있으며 프로세서간의 통신은 상호 연결망을 통하여 메시지 전송 방식으로 이루어진다. 다중컴퓨터에서 상호 연결망은 전체 시스템의 성능과 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다. 지금까지 널리 알려진 상호 연결망으로 메시[3], 하이퍼큐브[4], 스타(star) 그래프[1] 등이 있다.

상호연결망을 평가하는 망 척도는 분지수(degree), 지름(diameter), 대칭성(symmetry), 확장성(scalability), 고장허용도(fault tolerance), 임베딩(embedding) 등이 있다. 상호 연결망의 임베딩은 어떤 그래프 G^* 가 다른 그래프 H 에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 그래프들간의 관계를 분석하기 위한 평가 척도이다. 그래프 G 가 다른 그래프 H 에 적은 비용으로 임베딩 가능하다는 것은 연결망 G 에서 개발된 알고리즘을 연결망 H 에서 적은 비용으로 효율적으로 이용할 수 있기 때문에 상호 연결망의 임베딩 평가는 의미가 있다[6].

본 논문에서는 스타그래프 부류로 널리 알려진 스타(Star) 그래프와 팬케익(Pancake) 그래프[3], 버블정렬(Bubblesort) 그래프[5] 사이의 임베딩을 분석한다. 논문구

성은 2장에서 본 연구에서 적용되는 그래프의 정의와 성질을 그래프 이론 관점에서 알아보고 3장에서 임베딩 방법과 연장을 분석하고 마지막으로 결론을 맺는다.

2. 관련 연구

상호 연결망은 각 프로세서를 노드로 프로세서들 간의 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프 $G=(V,E)$ 로 표현된다. 여기서 $V(G)$ 는 노드들의 집합 즉 $V(G)={0,1,2,...,N-1}$ 이고, $E(G)$ 는 에지의 집합으로써 $V(G)$ 내의 임의의 두 노드 v 와 w 의 쌍 (v,w) 으로서 에지 (v,w) 가 존재할 필요충분조건은 노드 v 와 w 사이에 통신 채널이 존재하는 것이다. 지금까지 제안된 상호연결망을 노드 수를 중심으로 분류하면 $n \times k$ 개 노드를 갖는 메시(Mesh) 부류, $2n$ 개 노드를 갖는 하이퍼큐브(Hypercube) 부류, $n!$ 개 노드를 갖는 스타(Star) 그래프 부류로 나눌 수 있다.

스타(Star)그래프 부류는 n 개의 심볼을 이용하여 노드 표현의 개수가 대략 $n!$ 개 이고, 분지수(degree)는 대략 n 개 정도를 갖도록 구성되었다. 이러한 스타그래프 부류로 스타(Star)그래프, 버블정렬(Bubblesort)그래프, 팬케익(Pancake) 그래프[2], 전치(Transposition)그래프, 매크로-스타(Macro-star)그래프, Rotator graph[6] 등이 제안되었다. 스타(Star)그래프는 하이퍼큐브와 비슷한 노드 개수 증가할 때 상대적으로 적은 노드 개수와 짧은 지름을 갖는 장점이 있지만, 노드 개수 증가율이 급격하고 하이퍼큐브 부류와 임베딩이 어려운 단점이 있다.

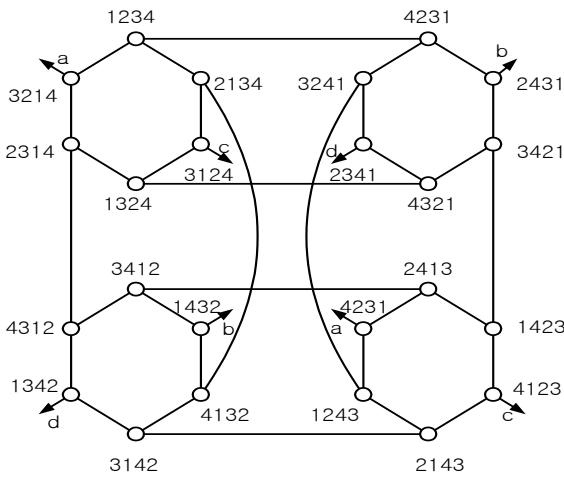
N -차원 스타(Star) 그래프 S_n 은 $n!$ 개의 노드와

* 이 논문은 2008년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2009-0086676)

$n!(n-1)/2$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n 개의 서로 다른 심볼 $\{1,2,3,\dots,n\}$ 의 순열로 표현될 수 있고, 노드 v 와 w 의 순열에서 첫 번째 심볼과 나머지 $n-1$ 개 심볼 중 한 개의 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드 v 와 w 사이에 에지가 존재한다. n 개의 서로 다른 집합 $\langle N \rangle = \{1,2,\dots,n\}$ 이라 하고, $\langle N \rangle$ 의 순열 $S = s_1s_2\dots s_n$, $s_i \in \langle N \rangle$ 이라 하면 스타그래프 S_N 은 다음과 같이 정의된다[1]. (그림 2)은 4-차원 스타그래프의 예이다.

$$V(S_n) = \{(s_1s_2\dots s_i\dots s_n) \mid s_i \in \langle n \rangle, i \neq j, s_i \neq s_j\}$$

$$E(S_n) = \{(s_1s_2\dots s_i\dots s_n)(s_1s_2\dots s_j\dots s_n) \mid (s_1s_2\dots s_i\dots s_n) \in V(S_n), 2 \leq i \leq n\}$$

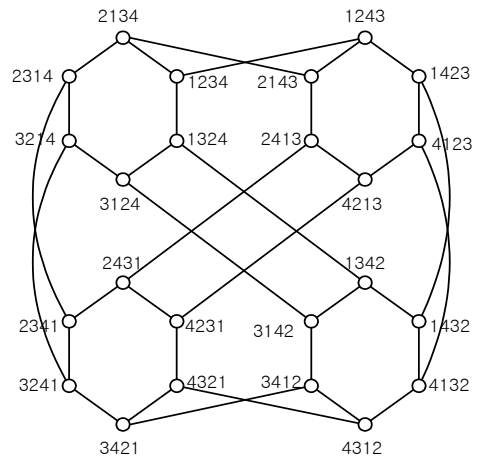


(그림 1) 4 차원 스타 그래프

n -차원 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_n 은 $n!$ 개의 노드와 $n!(n-1)/2$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n 개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드 v 와 w 의 n 개 비트 스트링에서 연속된 위치의 두개 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드 v 와 w 사이에 에지가 존재한다. N 개의 서로 다른 심볼 집합 $\langle N \rangle = \{1,2,\dots,n\}$ 이라 하고, $\langle N \rangle$ 의 순열을 $B = b_1b_2\dots b_n$, $b_i \in \langle N \rangle$ 이라 할 때, 버블정렬 그래프 B_n 은 다음과 같이 정의된다[5]. (그림 3)은 4-차원 버블정렬 그래프의 예이다.

$$V(B_n) = \{(b_1b_2\dots b_n) \mid b_i \in \langle n \rangle, i \neq j, b_i \neq b_j\}$$

$$E(B_n) = \{(b_1b_2\dots b_i b_{i+1} \dots b_n)(b_1b_2\dots b_{i+1} b_i \dots b_n) \mid (b_1b_2\dots b_i \dots b_n) \in V(B_n), 1 \leq i \leq n-1\}$$



(그림 2) 4 차원 버블정렬 그래프

3. 임베딩 분석

그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩 f 는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍 (θ, ρ) 을 말한다. θ 는 G 의 정점 집합 $V(G)$ 를 H 의 정점 집합 $V(H)$ 에 대응시키는 함수이고, ρ 는 G 의 에지 $e=(v,w)$ 에서 $\theta(v)$ 와 $\theta(w)$ 를 잇는 H 상의 경로로 대응시키는 함수이다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장율(dilation), 밀집율(congestion), 확장율(expansion)이 사용되고 있다. 그래프 G 의 에지 e 의 연장율은 H 상에서의 경로 $\rho(e)$ 의 길이를 말하고, 임베딩 f 의 연장율은 G 의 모든 에지의 연장율 중 최대값이다. 그래프 H 의 에지 e' 의 밀집율은 e' 에 포함되는 $\rho(e)$ 의 개수를 말하고, 임베딩 f 의 밀집율은 H 의 모든 에지의 밀집율 중 최대값이다. 임베딩 f 의 확장율은 G 의 정점의 개수에 대한 H 의 정점의 개수의 비를 말한다.

스타그래프 S_n 의 노드 $S(s_1s_2\dots s_i\dots s_n)$ 에서 심볼 s_1 과 s_i 가 교환된 순열 $s_1s_2\dots s_i\dots s_n$ 을 연결하는 에지를 i -차원 에지라 하고, 차원 에지 S_i , $2 \leq i \leq n$ 로 표현하고, 팬케익 그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2\dots p_i\dots p_n)$ 에서 심볼 p_i 부터 첫 번째 심볼 p_1 까지 역순으로 생성된 순열 $p_i p_{i-1} p_{i-2} \dots p_1 p_{i+1} \dots p_n$ 을 연결하는 에지를 i -차원 에지라 하고, 차원 에지 P_i , $2 \leq i \leq n$ 로 표현한다. 버블정렬 그래프 B_n 의 노드 $B(=b_1b_2\dots b_i b_{i+1} \dots b_n)$ 에서 인접한 2개의 심볼 b_i 과 b_{i+1} 이 교환된 순열 $b_1b_2\dots b_{i+1} b_i \dots b_n$ 을 연결하는 에지를 i -차원 에지라 하고, 차원 에지 B_i , $1 \leq i \leq n-1$ 로 표현한다.

스타그래프 S_n 의 임의의 노드 U 에서 차원 에지 S_i 에 인접한 노드를 V 라 할 때, 노드 V 는 다음과 같이 $V=S_i(U)$ 로 표현한다. 또한, 노드 U 에서 스타그래프의 차원 에지 S_i, S_j, S_k 를 순차적으로 적용하여 도달한 노드를 V 라 할 때, 차원 에지를 순차적으로 적용한다는 것은 첫 번째 단위 시간에는 노드 U 에서 차원 에지 S_i 에 의해 인접한 노드 $S_i(U)$ 의 순열을 생성함을 의미하고, 두 번째 단위 시간에는 노드 $S_i(U)$ 에서 차원 에지 S_j 에 인접한 노드 $S_j(S_i(P))$ 를 생성함을 의미하고, 세 번째 단위 시간에는 순열 $S_j(S_i(P))$ 에서 차원 에지 S_k 에 인접한 순열 $S_k(S_j(S_i(P)))$ 에 도달함을

의미하고 노드 $V=S_k(S_j(S_i(P)))$ 를 의미한다. 노드 U에 순차적으로 적용된 차원에지를 차원에지 시퀀스 $\langle S_i, S_j, S_k \rangle$ 로 나타낸다. 위의 차원에지와 차원에지 시퀀스는 이하 논문에서 동일하게 적용한다.

정리 1 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_N 을 스타그래프 S_N 에 연장을 3, 확장율 1에 임베딩 가능하다.

증명 버블정렬 그래프 B_N 의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_i b_{i+1}...b_n)$ 와 i -차원에지에 의해 연결된 노드 $B'(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_{i+1}b_i...b_n)$ 를 스타그래프 S_N 의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 와 노드 $S'(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_i...s_n)$ 로 각각 사상할 때 노드 S와 S'는 서로 인접하지 않으므로, 스타그래프 S_N 의 노드 S의 순열로부터 노드 S'의 순열로 변환할 때 까지 적용하는 스타그래프의 에지시퀀스 개수를 통해 연장율을 분석한다.

스타 그래프 S_N 의 노드 $S(s_1s_2s_3...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 순열에서 노드 $S'(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_i...s_n)$ 까지 라우팅을 위한 최단 경로의 에지시퀀스는 $\langle S_{i+1}, S_i, S_{i+1} \rangle$ 이다. 스타그래프에서 에지시퀀스를 이용한 라우팅 과정은 다음과 같다. 스타그래프 S_N 의 노드 $S(s_1s_2s_3...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 에서 차원에지 S_{i+1} 에 의해 인접한 노드의 순열은 $S_{i+1}(S)=s_{i+1}s_2s_3...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n$ 이고, 노드 $S_{i+1}(S)$ 에서 차원에지 S_i 에 의해 인접한 노드의 순열은 $S_i S_{i+1}(S)=s_i s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_i...s_n$ 이다. 노드 $S_i S_{i+1}(S)$ 에서 차원에지 S_{i+1} 에 의해 인접한 노드의 순열은 $S_{i+1}S_i S_{i+1}(S)=s_{i+1}s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_i...s_n$ 이므로 스타 그래프 S_N 의 노드 S'와 노드의 순열 $S_{i+1}S_i S_{i+1}(S)$ 는 동일한 주소를 가짐을 알 수 있고, 노드 S에서 노드 S'까지 라우팅을 위해 필요한 차원에지 개수는 3개이다.

따라서 버블정렬 그래프 B_N 의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_i b_{i+1}...b_n)$ 와 노드 $B'(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_{i+1}b_i...b_n)$ 를 스타그래프 S_N 의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 와 노드 $S'(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_i...s_n)$ 로 각각 사상할 때 연장율은 3이다. □

정리 2 n -차원 스타 그래프 S_n 을 N -차원 팬케익(Pancake) 그래프 P_n 으로 연장을 4, 확장율 1에 임베딩 가능하다.

증명 스타 그래프 S_n 의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 와 i -차원에지 S_i 에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_i s_2s_3...s_{i-1}s_1 s_{i+1}...s_n$ 이다($2 \leq i \leq n$). 스타 그래프 S_n 의 노드 S를 팬케익 그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 로 사상하고, 스타그래프의 노드 S'를 팬케익 그래프의 노드 P'로 사상할 때 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 에서 노드 $P'(=p_i p_2p_3...p_{i-1}p_1 p_{i+1}...p_n)$ 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 차원에지의 개수를 통해 임베딩의 연장율을 분석한다.

팬케익 그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 는 노드 $P'(=p_i p_2p_3...p_{i-1}p_1 p_{i+1}...p_n)$ 와 인접하지 않으므로 노드 P의 순열에 팬케익 그래프의 차원에지를 순차적으로 적용하여 노드 P'까지 도달할 수 있는 에지시퀀스를 구한다. 스타그래프의 i -차원에지를 4가지 경우로 나누어 증명한다.

경우1. $2 \leq i \leq 3$ -차원에지

스타그래프 S_n 의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 와 2-차원에지 S_2 에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_2s_1s_3...s_{i-1}s_1s_i s_{i+1}...s_n$ 이다. 팬케익 그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 는 노드 $P'(=p_2p_1p_3...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 와 2-차원에지 P_2 에 의해 인접하므로, 스타그래프 S_n 에서 노드 S와 2-차원에지에 의해 인접한 노드 S'는 팬케익 그래프에서 연장율 1로 사상된다. 또한, 스타그래프 S_n 의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 와 3-차원에지 S_3 에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_3s_2s_1...s_{i-1}s_1s_i s_{i+1}...s_n$ 이다. 팬케익 그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 는 노드 $P'(=p_3p_2p_1...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 와 3-차원에지 P_3 에 의해 인접하므로, 스타그래프 S_n 에서 노드 S와 3-차원에지에 의해 인접한 노드 S'는 팬케익 그래프에서 연장율 1로 사상된다.

경우2. $i=4$ -차원에지

스타그래프 S_n 의 노드 $S(=s_1s_2s_3s_4s_5...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 와 4-차원에지 S_4 에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_4s_2s_3s_1s_5...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n$ 이다. 스타그래프 S_n 의 노드 S를 팬케익 그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2p_3p_4p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 로 사상하고, 스타그래프의 노드 S'를 팬케익 그래프의 노드 $P'(=p_4p_2p_3p_1p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 로 사상할 때 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 에서 노드 $P'(=p_4p_2p_3p_1p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 팬케익 그래프의 차원에지 시퀀스는 $\langle P_4, P_3, P_2, P_3 \rangle$ 이다. 팬케익 그래프 P_n 에서 위의 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드 $P(=p_1p_2p_3p_4p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 에서 노드 $P'(=p_4p_2p_3p_1p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 까지 순열의 변화 과정을 살펴보자. 노드 $P(=p_1p_2p_3p_4p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 에서 차원에지 P_4 에 의해 인접한 순열은 $P_4(P)=p_4p_3p_2p_1p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n$ 이고, 순열 $P_4(P)$ 에서 차원에지 P_3 에 의해 인접한 순열은 $P_3P_4(P)=p_2p_3p_4p_1p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n$ 이고, 순열 $P_3P_4(P)$ 에서 차원에지 P_2 에 의해 인접한 순열은 $P_2P_3P_4(P)=p_3p_2p_4p_1p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n$ 이고, 순열 $P_2P_3P_4(P)$ 에서 차원에지 P_3 에 의해 인접한 순열은 $P_3P_2P_3P_4(P)=p_4p_2p_3p_1p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n$ 이다. 팬케익 그래프 P_n 의 노드 $P(=p_1p_2p_3p_4p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 에서 차원에지시퀀스 $\langle P_4, P_3, P_2, P_3 \rangle$ 를 순차적으로 적용한 순열 $P_3P_2P_3P_4(P)=p_4p_2p_3p_1p_5...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n$ 는 스타 그래프 S_n 의 노드 S'와 동일한 순열을 가지므로, 스타그래프 S_n 의 노드 S와 4-차원에지 S_4 에 의해 인접한 노드 S'는 팬케익 그래프에서 연장율 4에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우3. $5 \leq i \leq (n-1)$ -차원에지

스타그래프 S_n 의 노드 $S(=s_1s_2s_3s_4s_5...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 와 차원에지 S_i 에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_i s_2s_3s_4...s_{i-1}s_1s_{i+1}...s_n$ 이다. 스타그래프 S_n 의 노드 $S(=s_1s_2s_3s_4s_5...s_{i-1}s_i s_{i+1}...s_n)$ 와 노드 $S'(=s_i s_2s_3s_4...s_{i-1}s_1s_{i+1}...s_n)$ 가 팬케익 그래프의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_i p_{i+1}...p_n)$ 와 노드 $P'(=p_i p_2p_3p_4...p_{i-1}p_1 p_{i+1}...p_n)$ 로 각각 사상 되었을 때, 팬케익 그래프의 노드 $P(=p_1p_2$

$p_3 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_n$ 에서 노드 $P' (= p_1 p_2 p_3 p_4 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_n)$ 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 팬케익 그래프의 차원 에지 시퀀스는 $\langle P_{i-1}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i \rangle$ 이다. 팬케익 그래프 P_N 에서 위의 차원 에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드 $P (= p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_n)$ 에서 노드 $P' (= p_1 p_2 p_3 p_4 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_n)$ 까지 순열의 변화 과정을 살펴보자. 노드 $P (= p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_n)$ 에서 차원 에지 P_{i-1} 에 의해 인접한 순열은 $P_{i-1}(P) = p_{i-1} p_i p_{i-2} p_{i-3} \dots p_3 p_2 p_1 p_{i+1} \dots p_n$ 이고, 순열 $P_{i-1}(P)$ 에서 차원 에지 P_{i-2} 에 의해 인접한 순열은 $P_{i-2} P_{i-1}(P) = p_2 p_3 p_4 \dots p_{i-2} p_{i-1} p_i p_{i+1} \dots p_n$ 이고, 순열 $P_{i-2} P_{i-1}(P)$ 에서 차원 에지 P_{i-1} 에 의해 인접한 순열은 $P_{i-1} P_{i-2} P_{i-1}(P) = p_1 \dots p_{i-1} p_{i-2} \dots p_4 p_3 p_2 p_{i+1} \dots p_n$ 이고, 순열 $P_{i-1} P_{i-2} P_{i-1}(P)$ 에서 차원 에지 P_i 에 의해 인접한 순열은 $P_i P_{i-1} P_{i-2} P_{i-1}(P) = p_1 p_2 p_3 p_4 \dots p_{i-2} p_{i-1} p_i p_{i+1} \dots p_n$ 이다. 팬케익 그래프 P_N 의 노드 $P (= p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_n)$ 에서 차원 에지 시퀀스 $\langle P_{i-1}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i \rangle$ 를 순차적으로 적용한 순열 $P_{i-1} P_{i-2} P_{i-1}(P) = p_1 \dots p_{i-1} p_{i-2} \dots p_4 p_3 p_2 p_{i+1} \dots p_n$ 는 스타그래프 S_n 의 노드 S' 와 동일한 순열을 가지므로, 스타그래프 S_n 의 노드 S 와 i -차원 에지 S_i 에 의해 인접한 노드 S' 는 팬케익 그래프에서 연장율 4에 임베딩 가능함을 알 수 있다($5 \leq i \leq (n-1)$).

경우4. $i=n$ -차원 에지

스타그래프 S_n 의 노드 $S (= s_1 s_2 s_3 \dots s_i \dots s_{n-1} s_n)$ 와 n -차원 에지에 의해 인접한 노드 S' 의 순열은 $s_n s_2 s_3 \dots s_i \dots s_{n-1} s_1$ 이다. 스타그래프 S_n 의 노드 S 를 팬케익 그래프 P_N 의 노드 $P (= p_1 p_2 p_3 \dots p_i \dots p_{n-1} p_n)$ 로 사상하고, 스타그래프의 노드 S' 를 팬케익 그래프의 노드 $P' (= p_n p_2 p_3 \dots p_i \dots p_{n-1} p_1)$ 로 사상할 때 노드 $P (= p_1 p_2 p_3 \dots p_i \dots p_{n-1} p_n)$ 에서 노드 $P' (= p_n p_2 p_3 \dots p_i \dots p_{n-1} p_1)$ 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 팬케익 그래프의 차원 에지 시퀀스는 $\langle P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-1} \rangle$ 이다. 팬케익 그래프 P_N 의 노드 $P (= p_1 p_2 p_3 \dots p_i \dots p_{n-1} p_n)$ 에서 차원 에지 시퀀스 $\langle P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-1} \rangle$ 에 의해 노드 $P' (= p_n p_2 p_3 \dots p_i \dots p_{n-1} p_1)$ 순열을 생성할 수 있음을 보인다. 노드 $P (= p_1 p_2 p_3 \dots p_i \dots p_{n-1} p_n)$ 에서 차원 에지 P_n 에 의해 인접한 순열은 $P_n(P) = p_n p_{n-1} \dots p_i \dots p_3 p_2 p_1$ 이고, 순열 $P_n(P)$ 에서 차원 에지 P_{n-1} 에 의해 인접한 순열은 $P_{n-1} P_n(P) = p_2 p_3 p_4 \dots p_i \dots p_{n-1} p_n p_1$ 이고, 순열 $P_{n-1} P_n(P)$ 에서 차원 에지 P_{n-2} 에 의해 인접한 순열은 $P_{n-2} P_{n-1} P_n(P) = p_{n-1} \dots p_i \dots p_4 p_3 p_2 p_n p_1$ 이고, 순열 $P_{n-2} P_{n-1} P_n(P)$ 에서 차원 에지 P_{n-1} 에 의해 인접한 순열은 $P_{n-1} P_{n-2} P_{n-1} P_n(P) = p_n p_2 p_3 \dots p_i \dots p_{n-1} p_1$ 이다. 그러므로 팬케익 그래프 P_N 의 노드 $P (= p_1 p_2 p_3 \dots p_i \dots p_{n-1} p_n)$ 에서 차원 에지 시퀀스 $\langle P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-1} \rangle$ 를 순차적으로 적용한 순열 $P_{n-1} P_{n-2} P_{n-1} P_n(P) = p_n p_2 p_3 \dots p_i \dots p_{n-1} p_1$ 는 스타그래프 S_n 의 노드 S' 와 동일한 순열을 가지므로, 스타그래프 S_n 의 노드 S 와 n -차원 에지 S_n 에 의해 인접한 노드 S' 는 팬케익 그래프에서 연장율 4에 임베딩 가능함을 알 수 있다. □

4 결론

본 연구의 임베딩 방법은 각 그래프가 동일한 노드 수

를 가질 때 그래프의 에지 정의 즉, 에지 생성 규칙을 통해 인접한 두 노드를 사상하고자하는 대상 그래프에서 사용되는 가장 적은 수의 에지 정의로 표현하였다. 이때 적용된 에지의 수를 통해 임베딩에 대한 연장율을 분석하였다. 그래프 정의를 통해 임베딩 분석이 가능한 이유는 스타 그래프, 버블정렬 그래프, 팬케익 그래프가 노드 대칭적인 성질이 있기 때문이다.

본 논문의 연구 결과는 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_n 을 스타그래프 S_n 에 연장율 3, 확장율 1에 임베딩 가능하고, n -차원 스타 그래프 S_n 을 N -차원 팬케익(Pancake) 그래프 P_n 으로 연장율 4, 확장율 1에 임베딩 가능하다. 이러한 결과는 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_n 에서 개발된 알고리즘을 스타그래프 S_n 에서 상수의 추가적인 비용으로 시뮬레이션 할 수 있음을 의미한다.

참고문헌

[1] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnamurthy, "The Star Graph: An Attractive Alternative to the n -Cube," Proc. Int'l. Conf. on Parallel Processing, pp. 393-400, Aug. 1987.
 [2] H. Mohammad and I. Hal, "On the Diameter of Pancake Network," Journal of Algorithms, No. 25, pp. 67-94, 1997
 [3] S. Ranka, J-C. Wang, and N. Yeh, "Embedding Meshes on the Star Graph," J. Parallel and Distributed Computing, Vol. 19, pp. 131-135, 1993.
 [4] Y. Saad and M. H. Schutlz, "Topological Properties of Hypercubes," IEEE Trans. Comput., Vol. 37, pp. 867-872, 1988.
 [5] Z-T. Chou, C-C. Hsu, and J-P. Sheu, "Bubblesort Star graphs: A new Interconnection network," 9th International Parallel processing Symposium, pp. 41-48, 1996.
 [6] T-Y. Feng, "A Survey of Interconnection Networks," IEEE computer, pp. 12-27, December 1981.