

Spreadsheet를 이용한 연직배수공법의 확률론적 해석 Probabilistic Analysis of Vertical Drains Using Spreadsheet

김성필¹⁾, Seong-Pil Kim, 허준²⁾, Joon Heo, 윤창진³⁾, Chang-Jin Yoon

- 1) 한국농어촌공사 농어촌연구원 연구원, Researcher, Rural Research Institute, Korea Rural Community Corporation
- 2) 한국농어촌공사 농어촌연구원 연구원, Researcher, Rural Research Institute, Korea Rural Community Corporation
- 3) 한국농어촌공사 농어촌연구원 수석연구원, Senior Researcher in Chief, Rural Research Institute, Korea Rural Community Corporation

SYNOPSIS : The conventional factor of safety as used in geotechnical engineering does not reflect the degree of uncertainty of the relevant parameters. Then in the geotechnical engineering, there have been efforts to reflect the uncertainties of the geotechnical properties through probabilistic analysis. In this study, a practical method for calculation the second moment reliability index using the optimization tool of a spreadsheet software is introduced. And this methodology was proposed by Low, B. K.(1996).

The method is based on the perspective of an ellipsoid that just touches the failure surface in the original space of the variables. The method is applied to vertical drains(PVD) and compared with the result of Monte Carlo Simulation method.

Key words : Probabilistic analysis, Reliability index, Monte Carlo Simulation

1. 서 론

지반공학 분야에서 일반적으로 사용되고 있는 안전율 개념은 설계에 사용되는 지반정수의 불확실성을 반영하지 못하는 단점이 있다. 설계에 사용되는 지반정수를 확률변수(random variable)로 보면 평균의 지반정수를 사용한 결정론적 설계의 결과는 항상 평균의 값을 준다. 따라서 목표하는 설계가 될 확률은 50%이며, 안전율은 이러한 불확실성을 명확하게 반영하지 못한다. 지반의 성질은 많은 원인들에 의해서 불확실성을 가지며 이러한 불확실성을 반영하기 위하여 확률론적 해석을 설계에 반영하고자 하는 노력이 진행되어 왔다. 하지만 확률론적 해석은 많은 설계자들에게 어렵게 인식되고 있고, 해석 결과를 실제 설계에 적용하는 문제에 있어서도 어려움이 있는 것이 사실이다.

연약지반의 압밀축진공법으로 많이 사용되는 연직배수공법에서 지반정수의 불확실성에 따른 목표압밀도에 도달할 확률을 신뢰성지수(reliability index)를 이용하여 구하는 Low, B. K(1996)의 방법을 소개한다. 소개된 방법론은 Spreadsheet를 활용하여 확률을 계산할 수 있는 방법으로 이러한 방법과 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)결과를 비교하여 그 적용성을 고찰하였다. 확률론적 해석결과는 안전율개념과 달리 파괴와 비파괴의 개념이 아니기 때문에 그 결과를 어떻게 이해하고 적용해야하는지의 문제가 발생할 수 있다. 여기에서는 연직배수공법에 대하여 확률론적 해석결과를 활용할 수 있는 예를 소개한다.

2 연직배수공법의 확률론적설계

2.1 신뢰성지수(Reliability index)

신뢰성지수(Reliability index)는 평균값뿐만 아니라 불확실성까지 고려할 수 있는 방법으로, Hasofer and Lind(1974)의 신뢰성지수를 Ditlevsen(1981)은 다음과 같은 식을 제시하였다.

$$\beta_{HL} = \min_{\mathbf{x} \in F} \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m})} \quad (1)$$

여기에서 \mathbf{x} 는 확률변수의 벡터표현, \mathbf{m} 은 확률변수의 평균, \mathbf{C} 는 확률변수의 공분산행렬(covariance matrix)이다.

신뢰성지수 β 의 의미는 그림 1과 같다. 그림에서 보면 $m_1, \sigma_1, m_2, \sigma_2$ 는 각각 변수 X_1 과 X_2 의 평균과 표준편차이다. 이때 신뢰성지수 β 는 \mathbf{m} 에서 파괴영역의 경계까지의 거리로 이해할 수 있다.

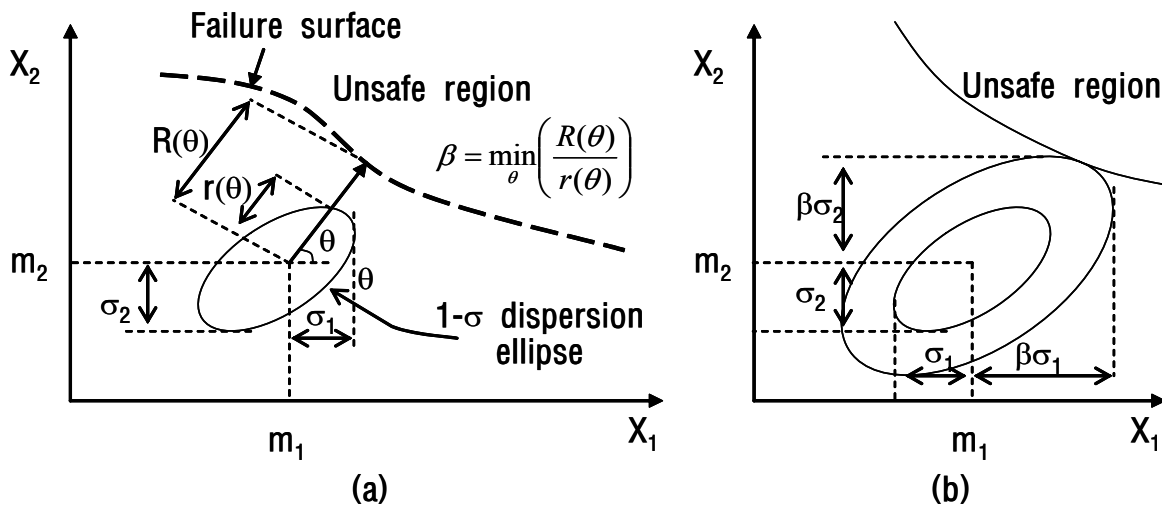


그림 1 (a) 평면상에서 신뢰성지수 β (b) Critical ellipse에 의한 신뢰성지수 β

Fig.1 (b)에서 보면 신뢰성지수 β 는 파괴면과 만나는 (x_1, x_2) 점을 구하는 문제로 볼 수 있다. 따라서 다음과 같은 식(2b)를 만족하는 최소의 식(2a)의 최소값을 구하는 최적화의 문제로 볼 수 있다.

$$\beta = \frac{(x_1 - m_1)^2}{(1 - \rho^2)\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{(1 - \rho^2)\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{(1 - \rho^2)\sigma_1\sigma_2} \quad (2a)$$

$$g(x_1, x_2) = 0 \quad (2b)$$

여기에서 $g(x_1, x_2) = 0$ 는 파괴면을 나타내는 식이고, ρ 는 상관계수(correlation coefficient)이다.

2.2 연직배수(PVD) 공법

연직배수제에 의한 연약지반의 압밀도를 산정하는 이론해는 많은 연구자들에 의해 제시되었다(Barron, R. A., 1944; Hansbo, S., 1979, 1981; Olson, R. E., 1977). 본 연구에서는 현재 많이 사용되고 있으며 배

수재의 통수저항과 스미어 효과를 동시에 고려할 수 있는 Hansbo의 식을 이용하였다. 연직배수공법에 있어서 깊이 z 의 수평방향의 평균압밀도 $U_h(t)$ 는 다음과 같이 주어진다(Hansbo, S., 1979, 1981).

$$U_h(t) = 1 - \exp\left(-\frac{2c_h t}{r_e^2 F}\right) \quad (3)$$

여기에서, c_h 는 수평압밀계수이고, t 는 압밀도에 도달하는 시간이며, r_e 는 Fig. 1에서 정의되는 바와 같이 배수재의 영향반경이다. F 는 다음과 같다.

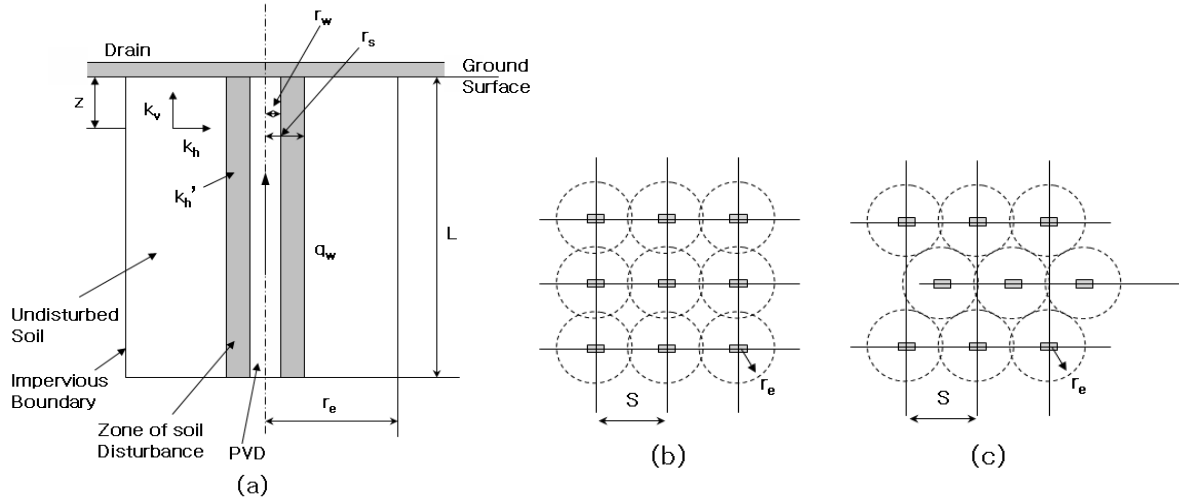


그림 2 PVD공법의 개요 (a) 단면 (b) 사각형배열 (c) 삼각형배열

$$F = F_o + F_s + F_r \quad (4)$$

$$F_o = \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} \quad (4a)$$

$$F_s = \left(\frac{k_h}{k_h'} - 1\right) \ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right) \quad (4b)$$

$$F_r = \pi z(2L - z) \frac{k_h}{q_w} \quad (4c)$$

식(2)에서 F_o , F_s 및 F_r 은 각각 드레인 간격(drain spacing factor), 스미어 효과(soil disturbance(smear) factor) 그리고 드레인의 통수저항(well-resistance factor)에 대한 영향을 나타내는 변수들이다. 여기에서 r_w 는 연직배수재의 반경으로 원형이 아닌 경우에는 등가환산반경을 사용하며, k_h/k_h' 는 스미어효과에 의한 수평투수계수의 감소비, r_s 는 스미어영역의 반경, L 은 배수재의 길이를 나타내며 q_w 는 연직배수재의 통수능을 나타낸다.

식(1)과 식(2)에 나타낸 기하학적 변수들을 Fig. 1(a)에 나타내었다. L 은 연직배수 경로, z 는 연직배수재의 상단에서 부터의 심도, k_h 는 원지반의 수평방향의 투수계수, k_h' 는 교란된 지반(smear zone)의 수평방향 투수계수, r_s 는 스미어 영역의 반경, q_w 는 연직드레인의 연직방향 통수능을 의미한다.

3 Spreadsheet를 이용한 확률론적 해석

3.1 적용조건

표 1 확률론적 해석의 적용조건

	$c_h(m^2/y)$	k_h/k_h'	r_e/r_w	r_s/r_w	L	k_h/q_w	t(year)
Mean	2	2	40	3	15	0.0003	2.5
C.O.V.	0.2, 0.3	0.2, 0.3	0.01	0.01	0.01	0.01	0.001
σ	0.4, 0.6	0.4, 0.6	0.4	0.03	0.15	0.000003	0.0025

설계에 적용한 조건은 표 1과 같다. 표 1과 같은 조건에서 압밀도 90%를 만족시키기 위한 r_e 는 식 (3) 과 식(4)에 의해서 1m이다.

3.2 Critical Ellipse Method의 적용

변수들이 서로 독립이라면 즉, 상관계수가 0라면 표 1의 조건을 식(2)와 같이 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^7 \left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i} \right)^2} \quad (5a)$$

$$g(\underline{x}) = 0.9 - \left[1 - \exp\left(-\frac{2c_h t}{r_e^2 F}\right) \right] = 0 \quad (5b)$$

이러한 과정을 Microsoft EXCEL의 해찾기(SOLVER) 기능을 이용하여 다음의 그림과 같이 구할 수 있다.

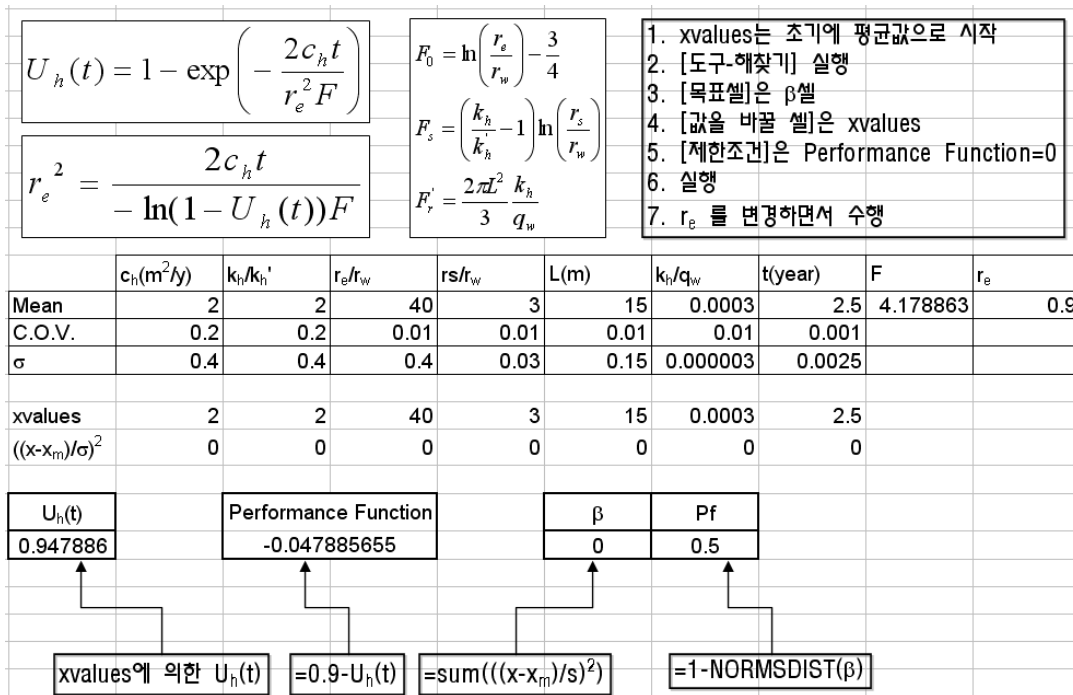


그림 3 EXCEL 해찾기 기능을 이용한 Critical ellipse 방법(실행 전)

	$c_h(m^2/y)$	k_h/k_h'	r_e/r_w	rs/r_w	L(m)	k_h/q_w	t(year)	F	r_e
Mean	2	2	40	3	15	0.0003	2.5	4.178863	0.9
C.O.V.	0.2	0.2	0.01	0.01	0.01	0.01	0.001		
σ	0.4	0.4	0.4	0.03	0.15	0.000003	0.0025		
xvalues	1.623449	2.157572	40.0028	3.000318	15.00039	0.0003	2.499983		
$((x-x_m)/\sigma)^2$	0.886189	0.15518	4.89E-05	0.000113	6.81E-06	3.46E-05	4.79E-05		
$U_h(t)$	Performance Function				β	Pf			
0.9	1.72445E-07				1.020598	0.153722			

그림 4 EXCEL 해찾기 기능을 이용한 Critical ellipse 방법(실행 후)

그림 3에서 수평압밀계수 c_h 와 스미어효과에 의한 수평투수계수비 k_h/k_h' 의 변동계수(coefficient of variance)는 0.2로 하고 나머지 변수는 0.01로 하였다. 이는 압밀도에 미치는 영향이 두 변수가 가장 크고 나머지 변수는 작음을 의미한다. 이러한 각 변수들의 민감도는 별도의 과정을 통하여 구하여야 한다. 주어진 조건에서 결정론적 설계에 의하면 r_e 는 1.04m이고, 실제로 지반조건의 불확실성을 고려하면 압밀도 90%에 도달할 확률은 50%이다. 그림 3과 그림 4에서 보면 $r_e=0.9m$ 인 경우에 압밀도 90%에 도달하지 못할 확률은 약 15.4%이다. 이와 같이 Critical ellipse method를 활용하면 간단한 경우에 있어서는 변동계수를 이용하여 지반의 불확실성을 고려한 해석이 가능하다.

3.3 몬테칼로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation) 검증

이상의 결과를 몬테칼로 시뮬레이션(M.C.S.)결과와 비교하였다. Pf는 표 1의 조건에서 압밀도 90%에 도달하지 못할 확률을 나타낸다. 결정론적 해석결과는 1.04m이며 그림 5에서 보는 바와 같이 두 방법 모두에서 목표압밀도 90%에 도달할 확률은 약 50%이다. 그림 5를 보면 두 방법 모두에서 동일한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

표 2 결과 비교

r_e (m)	C.E. COV,0.2	M.C.S. COV,0.2	C.E. COV,0.3	M.C.S. COV,0.3
0.6	0.001	0.001	0.016	0.017
0.7	0.005	0.007	0.044	0.044
0.8	0.034	0.031	0.112	0.114
0.9	0.154	0.153	0.248	0.242
1.0	0.433	0.433	0.455	0.452
1.1	0.758	0.761	0.680	0.681
1.2	0.940	0.942	0.851	0.851
1.3	0.991	0.989	0.944	0.945
1.4	0.999	0.999	0.982	0.981

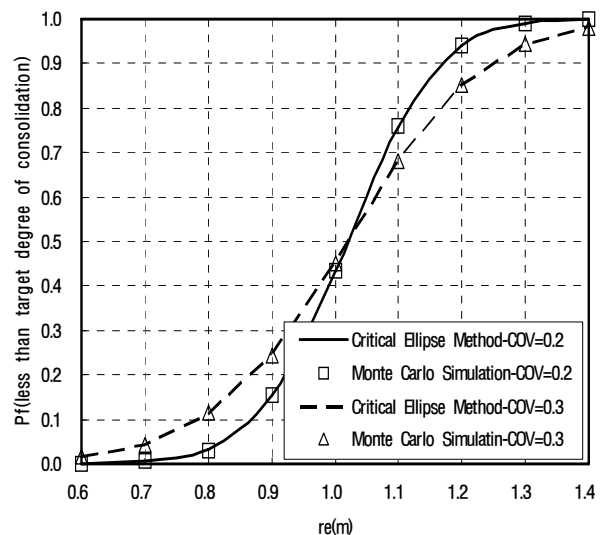


그림 5 Critical Ellipse방법과 M.C.S.의 비교

4 결론 및 고찰

지반공학 분야에서 일반적으로 사용되고 있는 안전율 개념으로 설명하지 못하는 지반조건의 불확실성을 반영하는 해석을 위해서 확률론적 해석이 적용되고 있지만 실제로 적용에는 어려움이 있다. 따라서 여기에서는 간단하게 사용할 수 있는 방법론을 제시하고 그 적용성을 연직배수공법(PVD)에 적용한 예를 소개하였다. 그리고 확률론적 해석에서 많이 사용되고 있는 몬테칼로 시뮬레이션 결과와 비교하여 그 적용성을 보였다.

참고문헌

1. Barron, R. A.(1948), "Consolidation of fine-grained soils by drain wells" Transactions, ASCE., Vol. 113, Paper No. 2346, pp. 718-742.
2. Ditlevsen, O.(1981), "Uncertainty modeling : with applications to multidimensional civil engineering systems", McGraw-Hill, New York.
3. Hansbo, S.(1979), "Consolidation of clay by band-shaped prefabricated drains" Ground Engineering, Vol. 12, No. 5, pp. 16-25.
4. Hansbo, S.(1981), "Consolidation of Fine-Grained Soils by Prefabricated Drains" 10th ICSMFE, Vol. 3, pp. 677-682.
5. Hasofer, A. M. and Lind, N.(1974), "An exact and invariant first-order reliability format", J. Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 100, EM1, pp 111~121.
6. Low, B. K.(1996), "Practical probabilistic approach using spreadsheet", ASCE Geotechnical Special Publication No. 58, Proc., Uncertainty in the Geologic Environment, Vol.2, pp. 1284~1302.