

코리올리 효과를 가진 압전-구조계의 모델차수축소법

Model Order Reduction for Piezoelectric-Structural Systems with Coriolis Effect

한 정 삼*

Han, Jeong-Sam

요 약

본 논문에서는 코리올리 효과를 가진 압전-구조 시스템의 주파수응답 해석을 효율적으로 수행하기 위한 크리토프 부공간 모델차수축소법을 제안하였다. 이 방법은 초기 유한요소모델과 축소모델의 전달함수의 계수인 모멘트를 일치시키는 방법을 이용하는 축소기법으로 이미 대형 유한요소모델의 주파수응답 해석에 효과적으로 이용되고 있다. 예제로 고려된 압전형 미소 각속도계의 해석에는 압전구동 하중과 구조체의 회전에 따른 원심력이 동시에 입력하중으로 고려되는 다중입력의 경우이므로 변환행렬 \mathbf{V} 의 생성시, block Arnoldi 과정을 이용하여 두 하중의 효과를 축소모델에 함께 고려한다. 본 문제에 제안된 축소기법을 이용한 결과, 축소모델을 이용하여 원래 시스템의 관심영역의 주파수응답을 작은 차수의 모델로도 정확하게 계산할 수 있음을 확인하였다. 본 논문에서 제안된 방법을 이용하면 다양한 가진조건과 각속도 입력 하에서의 주파수응답을 정확하고 더욱 효율적으로 계산할 수 있을 것이다.

keywords : 모델차수축소법, 주파수응답, 모멘트일치법, 코리올리력, 압전-구조 연성해석, 미소각속도계

1. 서 론

미소 각속도계는 압전효과를 이용하여 미소 구조체를 가진하여 작용하는 각속도로 인한 코리올리력으로 발생하는 변위를 측정한다. 이러한 미소 각속도계의 설계에는 압전-구조체에 대한 연성해석 및 다양한 입력 각속도 하에서의 주파수응답 해석이 필요하다. 또한, 주파수응답 해석에서 코리올리력을 고려하는 것이 요구된다. 이러한 코리올리 효과를 가진 압전-구조계의 연성 시스템에 대하여 여러 가지 조건 하에서 반복적인 주파수응답이 요구되는 경우는 모델차수축소법을 이용함으로써 주파수응답 해석시간을 대폭 감소시키고 수치계산을 효율적으로 수행할 수 있다. 본 논문에서는 크리토프 부공간에 근거한 모델차수축소법을 이용하여 코리올리 효과를 가진 압전-구조체의 축소모델링 및 미소 각속도계에 적용한 예제를 설명하고자 한다.

2. 코리올리 효과를 가진 압전-구조계

일반적으로 구조체의 회전에 의해 발생하는 코리올리(Coriolis) 효과를 고려한 운동방정식을 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 이차 상미분방정식으로 표현된다.

* 정회원 • 안동대학교 기계설계공학과 조교수 jshan@andong.ac.kr

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

이때 \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 및 $\mathbf{F}(t)$ 는 시스템의 질량, 감쇠, 강성 및 하중이며, $\mathbf{u}(t)$ 는 변위벡터이다. \mathbf{G} 는 다음과 같이 주어지는 코리올리 행렬(Coriolis matrix)이다.

$$\mathbf{G} = \sum_i^{N_e} 2 \int_{V_e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\omega} \mathbf{N} \rho dV_e \quad (2)$$

여기서 ρ 는 밀도, $\boldsymbol{\omega}$ 는 회전행렬(rotational matrix)이며 \mathbf{N} 은 형상함수행렬(shape function matrix)이다. 또한 압전-구조체의 연성 유한요소해석을 위한 행렬 형태의 방정식은 다음과 같은 이차 상미분방정식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{V}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{V}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}^Z \\ \mathbf{K}^{ZT} & -\mathbf{K}^d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{L} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서 \mathbf{K}^Z 는 기계적인 특성과 전기적인 특성이 결합된 압전연성행렬(piezoelectric coupling matrix), \mathbf{K}^d 는 유전행렬(dielectric permittivity coefficient matrix)이며 \mathbf{V} 와 \mathbf{L} 은 각각 전기 포텐셜 및 전하벡터를 의미한다. 이때 변위 $\mathbf{u}(t)$ 와 전압 $\mathbf{V}(t)$ 를 합한 새로운 상태변수벡터 $\mathbf{x}(t)$ 라고 하고, 식 (1)과 식 (3)을 합하면 다음과 같은 이차 상미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}e(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $e(t)$ 는 입력, $\mathbf{y}(t)$ 는 출력벡터를 의미하며, 실제로 필요한 자유도의 출력응답 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 은 $\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{x}$ 처럼 상태변수벡터의 선형결합으로 나타낼 수 있다. 하중의 가진 주파수를 Ω 로 하여 가진할 때, 압전-구조 시스템의 주파수응답(frequency response)는 $\mathbf{K}_c \mathbf{x} = \mathbf{F}$ 의 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (-\Omega^2 \overline{\mathbf{M}} + i\Omega \overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{K}})\mathbf{x}(\Omega) &= \mathbf{F}(\Omega) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{L}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5)$$

3. 코리올리 효과를 가진 압전-구조계의 모델차수축소법

모델차수축소법은 다음 관계를 만족하는 변환행렬 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ 을 구하여 초기 시스템인 식 (4)의 N 자유도의 상태변수벡터 $\mathbf{x}(t)$ 의 응답을 작은 자유도(n)로 구성된 축소시스템의 상태변수벡터 $\mathbf{z}(t)$ 로 아래와 같이 근사화한다.

$$\mathbf{x}(t) \cong \mathbf{V}\mathbf{z}(t) \quad \text{where } \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n, n \ll N \quad (6)$$

일반적인 크리토프 부공간에 근거한 모델차수축소법을 식 (4)에 적용하면 초기 시스템과 같은 형태를 가지는 다음의 축소시스템을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{z}(t) &= \mathbf{b}_r e(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}_r \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 축소행렬은 $\mathbf{M}_r = \mathbf{V}^T \overline{\mathbf{M}} \mathbf{V}$, $\mathbf{C}_r = \mathbf{V}^T \overline{\mathbf{C}} \mathbf{V}$, $\mathbf{K}_r = \mathbf{V}^T \overline{\mathbf{K}} \mathbf{V}$, $\mathbf{b}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{b}$ 및 $\mathbf{L}_r = \mathbf{L} \mathbf{V}$ 이 되며, 만약 변환행렬 \mathbf{V} 를 모멘트일치법에 따라서 다음 관계로부터 구하면, 초기 이차시스템과 축소시스템은 첫 n 번째까지의 모멘트(moment)가 서로 일치하게 된다.

$$\text{colspan}\{\mathbf{V}\} = \mathfrak{K}_n(-\overline{\mathbf{K}}^{-1} \overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{b}) = \text{span}\{\overline{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{b}, \dots, (-\overline{\mathbf{K}}^{-1} \overline{\mathbf{M}})^{n-1} \overline{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{b}\} \quad (8)$$

즉, 변환행렬 \mathbf{V} 를 구하는데 초기 시스템의 질량 및 강성행렬과 하중벡터만을 이용한다. 이러한 열벡터로 이루어진 변환행렬은 수치적으로 아놀디과정(Arnoldi process)를 통하여 계산되며, 다음과 같은 정규직교성(orthonormality)을 가진다. 행렬 \mathbf{I}_n 은 n 차의 단위행렬이다.

$$\begin{aligned} \text{colspan}\{\mathbf{V}\} &= \mathfrak{K}_n(-\bar{\mathbf{K}}^{-1}\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{b}) \\ \mathbf{V}^T\mathbf{V} &= \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (9)$$

한편 축소모델을 이용한 주파수응답 해석에서는 식 (6)의 관계를 식 (5)에 적용하고, 양변을 \mathbf{V}^T 로 곱하면

$$\begin{aligned} (-\Omega^2\mathbf{V}^T\bar{\mathbf{M}}\mathbf{V} + i\Omega\mathbf{V}^T\bar{\mathbf{C}}\mathbf{V} + \mathbf{V}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{V})\mathbf{z}(\Omega) &= \mathbf{V}^T\mathbf{F}(\Omega) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{z} \end{aligned} \quad (10)$$

를 얻으며, 이렇게 차수 n 으로 축소된 축소시스템을 통하여 압전-구조 시스템의 주파수응답을 효율적으로 계산할 수 있다.

4. 미소 각속도계의 주파수응답

압전구동 및 압저항검출을 이용하는 실리콘 미소 각속도계의 압전구동에 대한 주파수응답을 계산하는 문제를 고려하였다(Fig. 1 참조). 초기 유한요소모델은 43,021개의 자유도를 가지며 감쇠($\zeta=0.01$) 하에서 가진 주파수 1,000~400,000 Hz의 주파수응답에 대하여 100개의 자유도를 가진 축소모델의 결과와 비교하였다.(Fig. 2 참조).

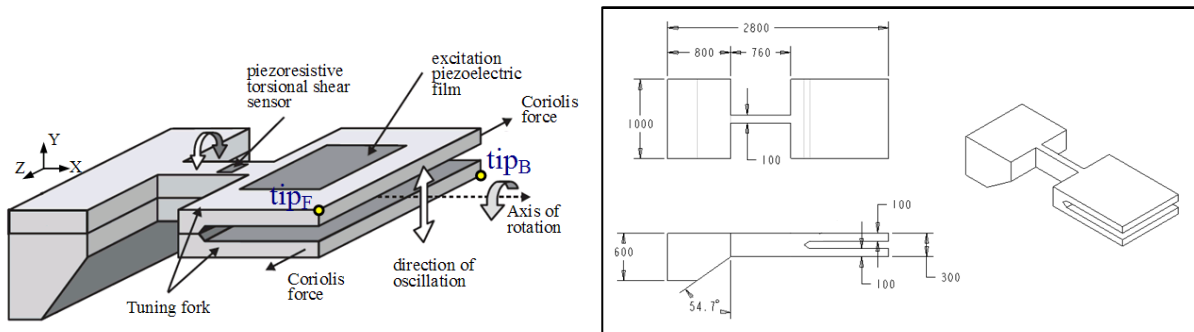


Figure 1 The piezoelectric angular velocity micro sensor using Coriolis effect

압전체의 구동부는 1,000~400,000 Hz에서 1 V의 크기로 가진되며, X축 방향으로 $\Omega_x=100$ rad/s의 각속도 입력이 발생한다고 가정한다. 따라서, 이 문제는 압전구동(piezoelectric actuation) 하중과 구조체의 회전에 따른 원심력(centrifugal force)이 동시에 하중으로 고려되는 다중입력(multiple loads)의 경우이므로 변환행렬 \mathbf{V} 의 생성시, block Arnoldi 과정을 이용한다.

그래프 상에서 구동방향인 Y방향과 검출방향인 Z방향의 변위의 진폭 및 위상에 대하여 초기 유한요소모델과 축소모델($n=100$)의 결과를 비교하였을 때, 전 관심주파수 영역에서 차이를 확인할 수 없을 정도로 정확한 주파수응답 결과를 얻을 수 있었다. 이렇듯 본 축소모델링기법을 통하여 초기 유한요소모델의 정확한 축소모델을 생성하고, 이를 이용하여 기존의 방법에 비하여 매우 효율적으로 압전-구조계의 주파수응답 해석을 수행할 수 있음을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 크리토프 부공간에 근거한 축소모델링기법을 이용하여 코리올리 효과를 가진 압전-구조계의 주파수응답 해석을 수행하여 계산의 효율성을 극대화하였다. 제안한 축소기법을 이용한 주파수응답 결과는 원래의 주파수응답과 비교하여 매우 우수한 일치성을 보였다. 본 논문에서 제안된 방법을 이용하면 다양한 가진조건과 각속도 입력 하에서의 주파수응답을 계산속도 측면에서 더욱 효율적으로 수행할 수 있을 것이다.

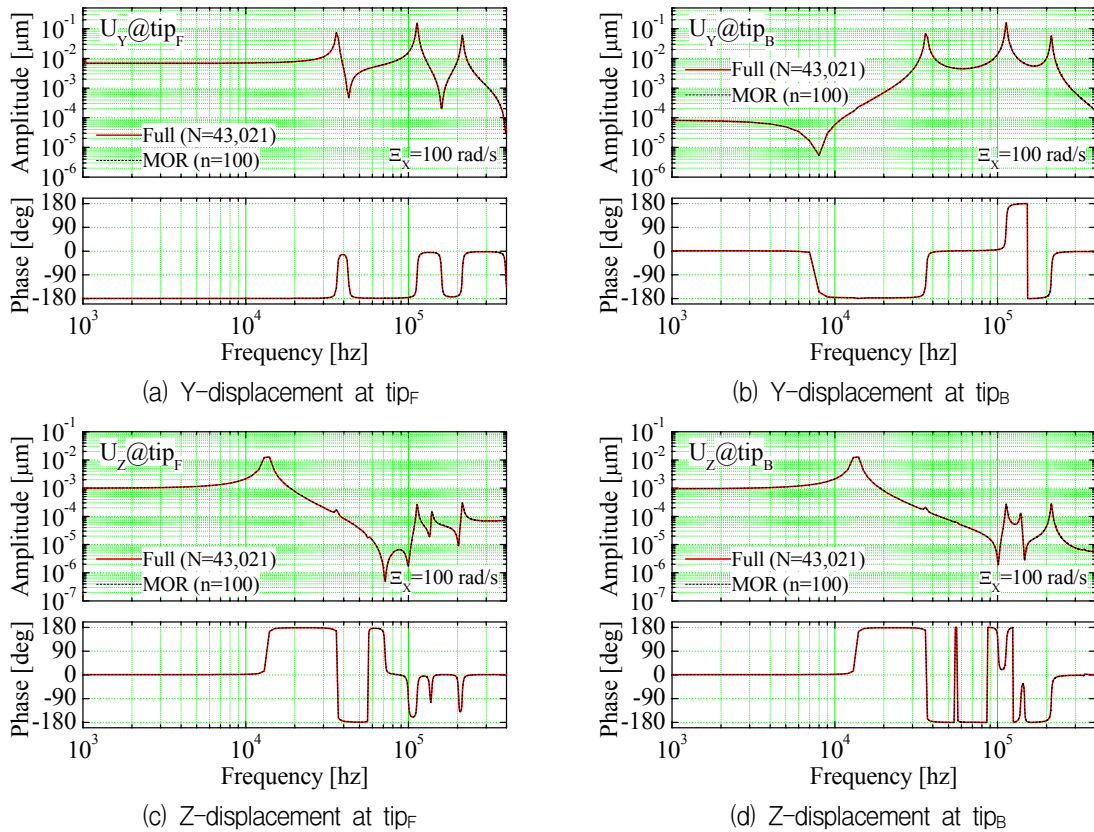


Figure 2 Comparison of the frequency responses between the full model and reduced model of order 100

감사의 글

이 논문은 2009학년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2009-0087705)

참고문헌

- 한정삼 (2007) 축소된 유한요소모델을 이용한 하드디스크 구동부의 고유치 및 주파수응답 해석, **대한기계학 회논문집 A권**, 31(5), pp.541~549.
- Voss, R., Bauer, K., Ficker, W., Gleissner, T., Kupke, W., Rose, M., Sassen, S., Schalk, J., Seidel, H. and Stenzel, E. (1997) Silicon Angular Rate Sensor for Automotive Applications with Piezoelectric Drive and Piezoresistive Read-out, *Transducer 97*, June 16-19, Chicago, pp.879~882.
- Freund, R.W. (2000) Krylov-Subspace Methods for Reduced-Order Modeling in Circuit Simulation, *J. Comput. Appl. Math.*, 123, pp.395~421.