

# 설계의존형 하중조건을 갖는 시스템의 아이소-지오메트릭 형상 최적설계

## Isogeometric Shape Design Optimization of Structural Systems Subjected to Design-dependent Loads

구본용\*·하승현\*\*·조선호\*\*\*

Koo, Bonyong · Ha, Seunghyun · Cho, Seonho

### 요약

본 논문에서는 등기하 해석법을 이용하여 설계의존형 하중조건을 갖는 구조물에 대한 형상 최적설계를 수행하였다. 유한요소법 기반 형상 최적설계는 CAD 모델과 해석 모델의 차이로 인해, 설계영역 매개변수화에 어려움이 있다. 등기하 해석법은 CAD 모델과 동일한 NURBS 기저 함수와 조정점을 해석에 이용함으로써 설계의 기하학적 변화를 해석모델에 직접적으로 표현할 수 있는 장점을 가진다. 하중조건이 설계영역이 변화함에 따라 변하는 최적설계 문제의 경우, 정확한 설계 영역 표현은 법선 벡터, 즉 변화하는 하중의 방향과 곡률과 같은 고차항의 정보를 정확하게 표현할 수 있고, 따라서 목적함수를 최소 또는 최대화시키는 최적의 해로 이끌어 낸다. 유한요소법 또는 밀도법을 이용한 형상 최적설계에서 설계의존형 하중조건을 갖는 구조물의 문제를 푸는 경우, 최적설계가 진행됨에 있어 변화하는 경계의 부정확성 때문에 정확한 설계민감도를 얻기가 어려운 점이 있다. 본 논문에서는, 수치 예제를 통해 등기하 해석 기반의 형상 최적설계 방법론이 설계의존형 하중조건을 갖는 구조물 문제에서 수월성을 가짐을 확인하였다.

**keywords** : Sensitivity Analysis, 형상 최적설계, 등기하 해석법, NURBS, 설계의존형 하중

### 1. 서론

등기하 해석법은 2003년 소개된 이래(Cho 등, 2003; Roh 등, 2004; 2005), 2005년 Hughes 등에 의해 수학적으로 정립된 해석법이다.(Hughes 등, 2005; Cottrell 등, 2006, 2007). 이 해석법은 특히 설계최적화 관점에서 더욱 효과적이다. 기존의 최적화 기법에서는 최적화 모델의 정보를 CAD로부터 얻어낼 때, 유한요소 해석을 위해 별도의 모델링 과정이 필요하였다. 이에 반해 등기하 해석법에서는 CAD의 NURBS를 직접 기저함수로 사용하기 때문에 최적화의 진행에 따른 요소망의 재구성이 필요가 없으며 기하학적으로 엄밀하게 형상을 표현할 수 있다. 최적화가 진행함에 따라 설계영역이 바뀌는 문제에 대하여 위상 최적설계를 사용한 경우, 일정 밀도 이상을 경계로 근사화하여 압력 하중(pressure load) 조건을 최적화 단계마다 수정하는 방법이 연구되기도 하였다(Du 등, 2004). 그러나 경계가 정확하게 표현되지 못하기 때문에 설계민감도에서 많은 오차가 예상되며 따라서 엄밀한 최적설계를 얻기는 어려웠다. 본 논문에서는 등기하 기법을 이용하여 정확한 경계를 표현함으로써 기하학적 엄밀성을 높이고 이에 따른 설계민감도를 구하여 최적화된 설계를 구해 본다.

\* 학생회원 · 서울대학교 조선해양공학과 박사과정 hotdove@snu.ac.kr

\*\* 학생회원 · 서울대학교 조선해양공학과 박사후 연구원 hash00@snu.ac.kr

\*\*\* 정 회원 · 서울대학교 조선해양공학과 및 RIMSE 교수 secho@snu.ac.kr

## 2. NURBS basis function

본 등기하 해석법에서는, 변위(displacement)와 좌표(coordinate)를 구성하는 기저함수를 동일한 차수의 같은 NURBS 기저 함수로 나타낸다. 노트 벡터는 파라메트릭 좌표계에서 1 차원 노트값들의 집합으로서 다음과 같이 정의된다.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad \xi_i \in \mathbf{R} : I \text{ 번째 노트, } P : \text{ 차수 } n : \text{ 기저함수의 개수}$$

B-spline 기저 함수는 재귀적으로 구성되어 있으며 그 표현식은 다음과 같다.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (p=0), \quad N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

1차 B-spline 기저함수는 B-spline 유한요소 선형 형상함수와 동일한 형태이며 B-spline 기저함수의 중요한 특징은 다음과 같다.

(1) Partition of unity  $\sum_{i=1}^n N_{i,p} = 1$

(2) Each  $N_{i,p}$  is compact and contained in the interval  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$

(3) Basis function  $N_{i,p} \geq 0$  for all  $\xi$

## 3. 설계민감도 해석

### 3.1. 전미분

현재의 설계영역  $\Omega$ 와 변화 후의 설계영역  $\Omega_\tau$ 에서 두 영역의 변환  $T: x \rightarrow x_\tau$  이 매개변수  $\tau$ 에 의해 정의되면 설계 속도장과 응답의 전미분은 다음과 같이 정의된다.

$$V(\mathbf{x}_\tau, \tau) \equiv \frac{d\mathbf{x}_\tau}{d\tau} = \frac{dT(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau}, \quad \dot{\mathbf{z}} \equiv \frac{d}{d\tau}(\mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}))|_{\tau=0} = \mathbf{z}' + \nabla \mathbf{z}^T \mathbf{V} \quad (1)$$

또한 영역적분의 전미분은 다음과 같다.

$$\psi_1 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega, \quad \psi_1' = \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_\tau} f_\tau(\mathbf{x}_\tau) d\Omega_\tau|_{\tau=0} = \int_{\Omega} [f'(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{V}(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \text{div } \mathbf{V}(\mathbf{x})] d\Omega \quad (2)$$

경계적분의 전미분은 설계 의존형 하중조건을 고려하여,  $g(\mathbf{x}) = p\mathbf{n}$  의 형태로 하여 전개하면 다음과 같다.

$$\psi_2 = \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad \psi_2' = \frac{d}{d\tau} \int_{\Gamma_\tau} p_\tau \mathbf{n}_\tau d\Gamma_\tau|_{\tau=0} = \int_{\Gamma} [\nabla p^T \mathbf{V} + p \text{div } \mathbf{V} - p \nabla \mathbf{V}^T] \mathbf{n} d\Gamma \quad (3)$$

### 3.2. 설계민감도 해석

선형 탄성체에 대하여 변분 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Omega} C_{ijkl} z_{i,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega = \int_{\Omega} f_i \bar{z}_i d\Omega + \int_{\Gamma} T_i \bar{z}_i = l(\bar{\mathbf{z}}), \quad \forall \bar{\mathbf{z}} \in Z \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{Z}$  은 각각 변위, 가상변위(virtual displacement), 해공간(space of kinematically admissible displacement)이며,  $f_i, T_i$ 는 체적력, 표면력을 의미한다. 설계 의존형 하중은 압력하중(pressure load) 표면력으로 정의되며, 이를  $T_i = pn_i$ 로 나타낸다. (4)식에 전미분을 취하게 되면 다음의 식을 얻는다.

$$a(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) = l_V'(\bar{\mathbf{z}}) - a_V'(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \quad (5)$$

여기서

$$a_V'(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = - \int_{\Omega} C_{ijkl} z_{i,m} V_{m,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega - \int_{\Omega} C_{ijkl} z_{i,j} \bar{z}_{k,m} V_{m,l} d\Omega + \int_{\Omega} C_{ijkl} z_{i,j} \bar{z}_{k,l} V_{m,m} d\Omega \quad (6)$$

$$l_V'(\bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Gamma} (T_{i,m} \bar{z}_i V_m + \kappa (T_i \bar{z}_i) V_m n_m) d\Gamma \quad : \text{Fixed Load} \quad (7-a)$$

$$l_V'(\bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Gamma} (p_{,j} V_j n_j \bar{z}_i + p V_{j,j} n_j \bar{z}_i - p V_{i,j} n_j \bar{z}_i) d\Gamma \quad : \text{Design-dependent Load} \quad (7-b)$$

## 4. 아이소-지오메트릭 형상 최적 설계

### 4.1. 설계민감도 검증

설계 의존형 하중조건을 갖는 설계민감도 식을 검증하기 위하여 내부압력을 받는 1/4 파이프에 대한 해석을 수행하였다. 임의의 속도장에 대한 변위를 표현하기 위해 그림 1의 (b)와 같이 면의 수직이 아닌 방향으로 모델을 변화시키며 유한차분에 의해 얻어진 값과 설계민감도를 비교하였다.

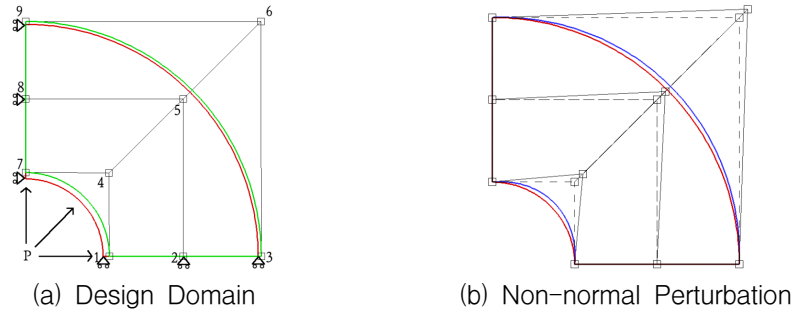


그림 1 내부압력을 받는 파이프 문제

표 1 유한차분과 유한요소 설계민감도의 비교

DOF	FDM	(A) DDM Eq. (7-a)	%	(B) DDM Eq. (7-b)	%
1x	2.935839E-05	7.839463E-06	374.4950	2.938916E-05	99.8953
2x	1.283707E-05	1.721349E-05	74.5756	1.284080E-05	99.9710
3x	1.140064E-05	8.634386E-06	132.0376	1.140411E-05	99.9696
4x	1.866651E-05	5.778239E-05	32.3048	1.868058E-05	99.9247
5x	8.162132E-06	1.681284E-06	485.4700	8.181002E-06	99.7693
6x	1.409646E-05	1.995839E-05	70.6293	1.411474E-05	99.8705

표 1에서 (A)는 식 (7-a)과 같이 하중조건이 고정일 때의 설계민감도이며, (B)는 식 (7-b)의 하중조건이 설계 의존형 조건일 때의 결과이다. 설계 의존형 하중조건을 가진 문제의 경우, 유한차분법으로 구한 경우와 비교해 볼 때 하중 조건이 고정인 (A)의 경우는 설계민감도가 잘 맞지 않는 것을 확인할 수 있으며, 본 논문에서 구한 (B)의 경우, 설계민감도가 유한차분에서 얻어진 결과와 잘 일치함을 확인할 수 있다.

#### 4.2. 설계의존형 하중조건을 가지는 수치예제

그림 2-(a)와 같이 아래 면에 압력하중을 받는 구조물에서, Volume 제약조건  $V = \int_{\Omega} d\Omega < V_{initial}$  일때 컴플라이언스를 최소화하는 최적설계를 수행하였다. Du와 Olhoff는 밀도법을 사용한 위상 최적설계를 수행하여, 하중이 고정된 경우 그림 2-(b)의 결과를 얻었으며 설계의존형 하중인 경우 그림 2-(c)의 결과를 얻었다.



그림 2 압력을 받는 구조물의 위상 최적설계

동일한 문제를 등기하 기법으로 최적설계를 수행하였을 때의 결과는 그림 3과 같으며, 위상 최적설계와 비교를 하였을 때 최적형상이 더욱 부드럽고 엄밀한 형상을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 또한 그림 3-(b)의 경우 목적함수인 컴플라이언스는 매우 안정적으로 최적해에 수렴하고 있음을 알 수 있다.

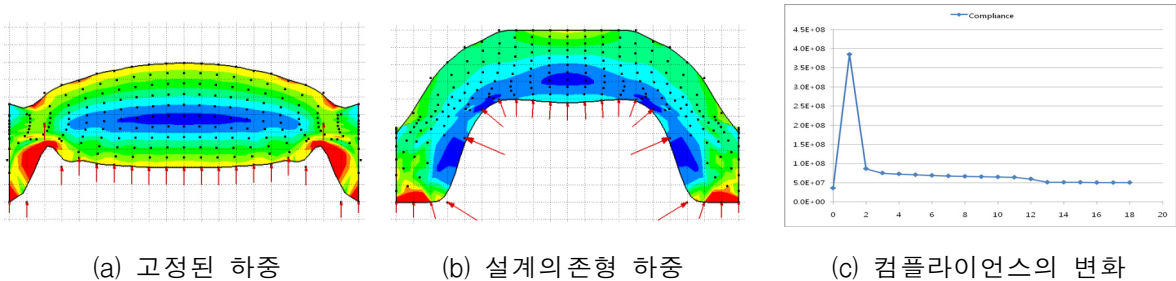


그림 3 압력을 받는 구조물의 등기하 최적설계

#### 감사의 글

이 논문은 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행되었습니다. (No. R32-2008-000-10161-0)

#### 참고문헌

- 하승현, 조선희 (2007) 등기하 해석법을 이용한 설계민감도 해석, 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp.33~345.
- J. Du and N. Olhoff (2004) Topological optimization of continuum structures with design-dependent surface loading – Part I: new computational approach for 2D problems, *Structural and Multidisciplinary Optimization* Vol. 27, pp. 151-165.