

NURBS 곡면을 이용한 구조-유체 연성문제의 형상 최적설계

Shape Design Optimization of Structure-Fluid Interaction Problems using NURBS Surfaces

장 홍 래* · 김 민 근† · 조 선 호‡
Jang, Honglae · Kim, Mingeun · Cho, Seonho

요 약

본 논문에서는 정상상태 유체-구조 연성문제를 연속체 기반으로 정식화하고 유한요소법을 이용하여 완전 연성된 해를 구하였다. 대 변형을 고려하기 위하여 토탈 라그랑지안 정식화를 사용하였으며 유체 및 구조의 비선형성이 고려되었다. 유체와 구조 영역의 형상을 NURBS 곡면을 이용하여 매개화하여 표현하였으며, 형상 최적화를 위해 효율적인 설계민감도 해석법인 애조인 기법을 이용하여 압력, 속도, 변위 등에 대한 설계민감도를 구하였다. 이를 이용하여 최소 컴플라이언스를 갖게 하는 구조물 내부의 유체영역의 설계 등의 수치예제를 통하여 개발된 방법론의 타당성을 확인하였다.

keywords : Fluid-Structure Interaction Problem(유체-구조 연성문제; FSI), Navier-Stokes Equation(Navier-Stokes 방정식), Adjoint Variable Method(애조인 기법; AVM), Shape Design Sensitivity Analysis(형상 설계민감도; DSA), Shape Design Optimization(형상 최적설계)

1. 서 론

조선해양 분야에서 유체-구조 연성 문제는 지금까지는 유체와 구조 영역을 각각 독립적으로 계산한 후, 전체 해를 반복법에 의해서 구하는 방법을 사용하여 왔다. 그러나 이러한 방법은 계산 비용과 효율성, 그리고 정확성 면에서 바람직하지 않으며 특히 비선형 문제로 확장되었을 때는 더욱 심각하다. 또한 유한차분법을 이용한 형상 설계민감도를 사용하여 최적설계를 수행하기에는 계산비용 측면에서 매우 비 현실적이다. 이러한 문제를 해결하기 위해 제시된 방법이 유체-구조 완전 연성과 해석적 설계민감도 해석법이다. 이 방법은 유체와 구조를 각각 푸는 기존의 방법과는 달리, 유체-구조 영역을 동시에 고려하여 해를 구하는 방법이다. 본 연구에서는 구조 대 변형을 고려한 유체-구조 완전 연성문제의 해법을 제시한다. 유체 영역에서 정상 상태의 비 압축성 유체에 대한 Navier-Stokes 방정식을 고려하고, 고체 영역에서는 기하학적 비선형성을 고려한다. 또한 본 문제에 대해 형상 최적설계를 수행하기 위하여 구조물의 형상을 NURBS 곡면으로 매개화하여 표현하였고, 효율적인 애조인 설계민감도 해석법을 제시하여 설계구배(Gradient)에 기초한 형상 최적설계를 수행한 수치적 예제를 통해 그 타당성을 확인하였다.

* 학생회원 · 서울대학교 조선해양공학과 석사과정 perr83@snu.ac.kr

† 학생회원 · 서울대학교 조선해양공학과 박사과정 genha21@snu.ac.kr

‡ 정 회 원 · 서울대학교 조선해양공학과 및 RIMSE 교수 secho@snu.ac.kr

2. NURBS 기저 함수를 이용한 곡면의 매개화

2.1. 노트 벡터 및 기저 함수

노트 벡터는 파라메트릭 좌표계에서 1차원 노트값들의 집합으로, 다음과 같이 정의된다.

$$\Xi = \{u_1, u_2, \dots, u_{n+p+1}\} \quad (1)$$

여기서, $u_i \in \mathbf{R}$ 는 I 번째 노트, p는 차수 그리고 n은 기저함수의 개수를 뜻한다. 노트 벡터는 배치 분포에 따라 균일(uniform) 노트 벡터, 불균일(nonuniform) 노트 벡터로 나뉠 수 있으며, 한 좌표에 여러 번 노트가 중복될 수 있는데 이를 중복 노트 벡터라 한다. B-spline 기저 함수는 재귀적으로 구성되어 있으며 그 표현은 다음과 같다.

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (3)$$

이를 활용하여 NURBS 기저 함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$R_i^p(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{\hat{i}} N_{\hat{i},p}(u)w_{\hat{i}}} \quad (4)$$

2.2. NURBS 곡면

NURBS 곡면은 양 방향 NURBS 기저 함수들의 선형 조합으로 만들어 지는데 이때 기저 함수들의 계수들을 조정점(control point)이라고 한다. 양 방향에 대해 각각 n, m 개의 기저함수와 n, m개의 조정점이 주어져 있을 때의 NURBS 곡면은 다음과 같이 정의된다.

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{ij}P_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=0, \hat{j}=0}^{n,m} N_{\hat{i},p}(u)N_{\hat{j},q}(v)w_{\hat{i}\hat{j}}}}{\sum_{\hat{i}=0, \hat{j}=0}^{n,m} N_{\hat{i},p}(u)N_{\hat{j},q}(v)w_{\hat{i}\hat{j}}} \quad (5)$$

이 때, $P_{i,j}$ 는 양 방향 조정점의 행렬이다.

3. 구조-유체 연성 문제의 형상 설계 민감도 해석

구조-유체 연성문제에 대하여 변분 방정식은 유체, 고체영역 및 경계면에서 각각 다른 형태로 나타난다. 먼저 유체 영역에서는 다음과 같다.

$$a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + b(\bar{p}, \bar{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_F \mathbf{n}_{\Gamma_f} d\Gamma \quad \text{for all } \bar{\mathbf{u}} \in \bar{U} \quad (6)$$

$$b(\bar{p}, \mathbf{u}) = 0 \quad \text{for all } \bar{p} \in \bar{P} \quad (7)$$

고체 영역에서는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Gamma_b} \bar{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{n}_{\Gamma_b}^0 d\Gamma \quad \text{for all } \bar{\mathbf{z}} \in \bar{Z} \quad (8)$$

경계 면에서의 변분 방정식은 다음과 같다.

$$a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + b(p, \bar{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + d(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = 0 \text{ for all } \bar{\mathbf{u}} \in \bar{U}, \bar{\mathbf{z}} \in \bar{Z} \quad (9)$$

$$b(\bar{p}, \mathbf{u}) = 0 \text{ for all } \bar{p} \in \bar{P} \quad (10)$$

각각의 약 형식은 다음과 같이 유도된다.

$$a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega_F} \frac{1}{2} \mu_F (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) : (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) d\Omega \quad (11)$$

$$b(p, \bar{\mathbf{u}}) = - \int_{\Omega_F} p \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega \quad (12)$$

$$c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega_F} \rho_F \bar{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} d\Omega \quad (13)$$

$$d(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Gamma_k} \bar{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{n}_S^0 d\Gamma \quad (14)$$

$$b(\bar{p}, \mathbf{u}) = - \int_{\Omega_F} \bar{p} \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (15)$$

형상 설계민감도를 구하기 위해 구조 변형에너지를 목적함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\Psi \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} S_{ij}^{(n+1)}(\mathbf{z}) \epsilon_{ij}^{(n+1)}(\mathbf{z}) d\Omega \quad (16)$$

최종적으로 유도된 변형 에너지의 설계 민감도는 다음과 같이 얻을 수 있다. (조현규와 조선희, 2004)

$$\begin{aligned} \Psi' = & -a_V'({}^{n+1}\mathbf{u}, \xi) - b_V'({}^{n+1}p, \mathbf{u}) - c_V'({}^{n+1}\mathbf{u}, \xi) \\ & - d_V'({}^{n+1}\mathbf{z}, \zeta) - b_V'(\phi, {}^{n+1}\mathbf{u}) + \Psi'_{2,V}({}^{n+1}\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (17)$$

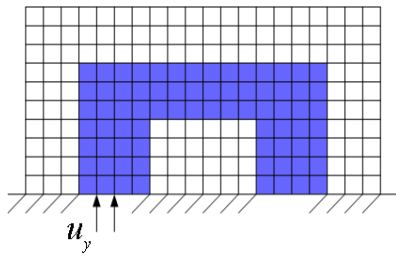
4. 형상 최적 설계 예제

그림 1-(a)와 같이 구조 영역 내부에 초기 속도가 주어진 유체 영역이 존재하는 구조물에 대하여 최적화를 수행하였다. 그림의 색칠 된 부분이 유체 영역이다. 이때 목적함수는 구조 영역의 변형 에너지이고 제한 조건은 유체 영역의 부피의 90% 이다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

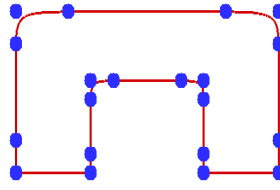
$$\text{Minimize } \Psi \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} S_{ij}^{(n+1)}(\mathbf{z}) \epsilon_{ij}^{(n+1)}(\mathbf{z}) d\Omega \quad (18)$$

$$\text{Subject to } V = \int_{\Omega_F} d\Omega < V_{allowable} \quad (19)$$

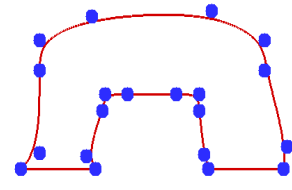
설계변수는 그림 1-(b)의 점과 같은 NURBS 곡면의 조정점으로 하였고, 재료상수와 조건들은 구조의 탄성계수 $E = 10^4$, 유체의 밀도 $\rho = 1.0$, 점성계수는 $\mu = 1.0$, 유입되는 유체의 속도 $\mathbf{u}_y = 1.0$ 으로 가상의 값을 사용하였다. 그림 1-(b)에서 초기 설계의 구조 변형에너지는 7.4113 이었으나, 최적화 후(그림 1-(c))에는 1.9864로 약 74%의 감소되었음을 알 수 있다. 그림 2에서는 최적설계 전후의 유체 속도장과 압력분포를 비교하였다. 최적설계는 초기 설계에 비해 속도장이 부드러워졌고 높은 압력이 나타나는 영역의 넓이가 줄어든 것을 확인 할 수 있다.



(a) 수치예제 모델



(b) 초기 형상



(c) 최적 형상

그림 1 유체 영역 최적화 모델

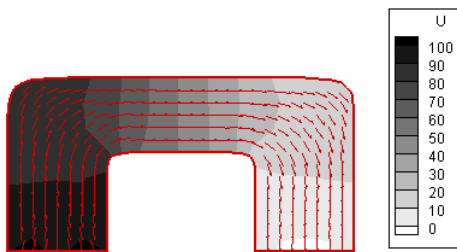


그림 4. 초기 형상의 유체 속도장과 압력분포

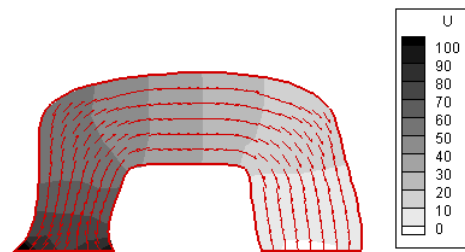


그림 5. 최적 형상의 유체 속도장과 압력분포

4. 결론

본 연구에서는 정상상태 비선형 유체-구조 연성문제를 정식화하고, 유한요소법을 이용하여 형상 최적설계를 수행하였다. 유체-구조 연성 문제에 대해서 애조인 기법을 이용한 설계민감도 해석법을 개발하였고 수치적 예제를 통해 그 효율성과 정확성을 확인하였다. 이를 이용하여 구조물의 변형 에너지가 최소가 되도록 형상 최적설계를 수행하였으며, 물리적으로 타당한 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다.

감사의 글

이 논문은 2009년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행되었습니다. (No. R32-2008-000-10161-0)

참고문헌

- 조현규, 조선희 (2004) 유체-구조 연성문제의 형상 최적 설계, **대한조선학회 추계학술대회 논문집**, pp.763-768.
- 하운도, 김민근, 조현규, 조선희 (2007) 유체-구조 연성문제의 형상최적설계, **대한조선학회 학술논문집**, 44(2), pp.1-7.